

6976  
51A





۳۵۶۱۷

و-د-ه-و

الحمد لله رب العالمين

مراد بن فرهاد و فرهاد بن خواب

راحمی حمید بن سید محمد بن محمد بن

مترجم احمد بن رضی الله عنه

بالمعتمد بن محمد بن محمد بن

دستور





فهرست الجزء الثاني من المجلد الزهري في الاعمال الجبرية

صحف

## الباب الرابع

في المناسبات والمتواليات العددية والهندسية والكسور المتسلسلة والحل

غير المعين للمعادلات ذات الدرجة الاولى ١٥٦

في المناسبة العددية اى القاضية ١٥٦

في المناسبة الهندسية ١٥٧

في المتواليات العددية ١٦٤

في المتواليات التقسيمية اى الهندسية ١٦٩

في المتباينات ١٨٠

في الكسور للمتسلسلة ١٩٠

في الحل غير المعين للمعادلات ذات الدرجة الاولى ٢٠٤

في الحلول الصحيحة لعدة معادلات ذات درجة اولى محتوية على مجاهيل

عدد هانز يد عن عدد المعادلات المذكورة ٢٠٤

الباب الخامس في نظريات الاعداد الأولية والكسور غير القابلة

للاختصار وخواص قسمة الاعداد على بعض تواسمها ونظريات على الجزؤ ٢٣٧

في نظريات الاعداد الانولية ٢٣٨

١٠٠ - ١٠١ - ١٠٢ - ١٠٣ - ١٠٤ - ١٠٥ - ١٠٦

١٠٧ - ١٠٨ - ١٠٩ - ١١٠ - ١١١ - ١١٢ - ١١٣ - ١١٤ - ١١٥ - ١١٦ - ١١٧ - ١١٨ - ١١٩ - ١٢٠

١٢١ - ١٢٢ - ١٢٣ - ١٢٤ - ١٢٥ - ١٢٦ - ١٢٧ - ١٢٨ - ١٢٩ - ١٣٠ - ١٣١ - ١٣٢ - ١٣٣ - ١٣٤ - ١٣٥ - ١٣٦ - ١٣٧ - ١٣٨ - ١٣٩ - ١٤٠

١٤١ - ١٤٢ - ١٤٣ - ١٤٤ - ١٤٥ - ١٤٦ - ١٤٧ - ١٤٨ - ١٤٩ - ١٥٠ - ١٥١ - ١٥٢ - ١٥٣ - ١٥٤ - ١٥٥ - ١٥٦ - ١٥٧ - ١٥٨ - ١٥٩ - ١٦٠

١٦١ - ١٦٢ - ١٦٣ - ١٦٤ - ١٦٥ - ١٦٦ - ١٦٧ - ١٦٨ - ١٦٩ - ١٧٠ - ١٧١ - ١٧٢ - ١٧٣ - ١٧٤ - ١٧٥ - ١٧٦ - ١٧٧ - ١٧٨ - ١٧٩ - ١٨٠

١٨١ - ١٨٢ - ١٨٣ - ١٨٤ - ١٨٥ - ١٨٦ - ١٨٧ - ١٨٨ - ١٨٩ - ١٩٠ - ١٩١ - ١٩٢ - ١٩٣ - ١٩٤ - ١٩٥ - ١٩٦ - ١٩٧ - ١٩٨ - ١٩٩ - ٢٠٠

٢٠١ - ٢٠٢ - ٢٠٣ - ٢٠٤ - ٢٠٥ - ٢٠٦ - ٢٠٧ - ٢٠٨ - ٢٠٩ - ٢١٠ - ٢١١ - ٢١٢ - ٢١٣ - ٢١٤ - ٢١٥ - ٢١٦ - ٢١٧ - ٢١٨ - ٢١٩ - ٢٢٠

٢٢١ - ٢٢٢ - ٢٢٣ - ٢٢٤ - ٢٢٥ - ٢٢٦ - ٢٢٧ - ٢٢٨ - ٢٢٩ - ٢٣٠ - ٢٣١ - ٢٣٢ - ٢٣٣ - ٢٣٤ - ٢٣٥ - ٢٣٦ - ٢٣٧ - ٢٣٨ - ٢٣٩ - ٢٤٠

٢٤١ - ٢٤٢ - ٢٤٣ - ٢٤٤ - ٢٤٥ - ٢٤٦ - ٢٤٧ - ٢٤٨ - ٢٤٩ - ٢٥٠ - ٢٥١ - ٢٥٢ - ٢٥٣ - ٢٥٤ - ٢٥٥ - ٢٥٦ - ٢٥٧ - ٢٥٨ - ٢٥٩ - ٢٦٠

٢٦١ - ٢٦٢ - ٢٦٣ - ٢٦٤ - ٢٦٥ - ٢٦٦ - ٢٦٧ - ٢٦٨ - ٢٦٩ - ٢٧٠ - ٢٧١ - ٢٧٢ - ٢٧٣ - ٢٧٤ - ٢٧٥ - ٢٧٦ - ٢٧٧ - ٢٧٨ - ٢٧٩ - ٢٨٠

٢٨١ - ٢٨٢ - ٢٨٣ - ٢٨٤ - ٢٨٥ - ٢٨٦ - ٢٨٧ - ٢٨٨ - ٢٨٩ - ٢٩٠ - ٢٩١ - ٢٩٢ - ٢٩٣ - ٢٩٤ - ٢٩٥ - ٢٩٦ - ٢٩٧ - ٢٩٨ - ٢٩٩ - ٣٠٠

٣٠١ - ٣٠٢ - ٣٠٣ - ٣٠٤ - ٣٠٥ - ٣٠٦ - ٣٠٧ - ٣٠٨ - ٣٠٩ - ٣١٠ - ٣١١ - ٣١٢ - ٣١٣ - ٣١٤ - ٣١٥ - ٣١٦ - ٣١٧ - ٣١٨ - ٣١٩ - ٣٢٠

٣٢١ - ٣٢٢ - ٣٢٣ - ٣٢٤ - ٣٢٥ - ٣٢٦ - ٣٢٧ - ٣٢٨ - ٣٢٩ - ٣٣٠ - ٣٣١ - ٣٣٢ - ٣٣٣ - ٣٣٤ - ٣٣٥ - ٣٣٦ - ٣٣٧ - ٣٣٨ - ٣٣٩ - ٣٤٠

٣٤١ - ٣٤٢ - ٣٤٣ - ٣٤٤ - ٣٤٥ - ٣٤٦ - ٣٤٧ - ٣٤٨ - ٣٤٩ - ٣٥٠ - ٣٥١ - ٣٥٢ - ٣٥٣ - ٣٥٤ - ٣٥٥ - ٣٥٦ - ٣٥٧ - ٣٥٨ - ٣٥٩ - ٣٦٠

٣٦١ - ٣٦٢ - ٣٦٣ - ٣٦٤ - ٣٦٥ - ٣٦٦ - ٣٦٧ - ٣٦٨ - ٣٦٩ - ٣٧٠ - ٣٧١ - ٣٧٢ - ٣٧٣ - ٣٧٤ - ٣٧٥ - ٣٧٦ - ٣٧٧ - ٣٧٨ - ٣٧٩ - ٣٨٠

٣٨١ - ٣٨٢ - ٣٨٣ - ٣٨٤ - ٣٨٥ - ٣٨٦ - ٣٨٧ - ٣٨٨ - ٣٨٩ - ٣٩٠ - ٣٩١ - ٣٩٢ - ٣٩٣ - ٣٩٤ - ٣٩٥ - ٣٩٦ - ٣٩٧ - ٣٩٨ - ٣٩٩ - ٤٠٠

باب في النجاسة الجبرية القسم على اشرف

نقاس مشترك الاغصنة وفي تحليل النجاسات الجبرية التي عولها الاول ٣٣٨

في انقاس مشترك الاغصنة بين عدة كليات جبرية صحيحة ٣٢٩

باب التاسع في نظريات عمومية تتعلق بمعادلات ذات مجهول

واحد ودرجة ما ٣٦٥

تعريف واية ٣٦٥

في تركيب تحليل النجاسة الناتجة من دلالة تامة للتغير من ٣٦٨

في المقادير التي تأخذها دلالة تامة للتغير من عند ما تفرضه

مقادير كبيرة او صغيرة وفي التغيرات التي تطرأ على الدلالة عندما

يأخذ من في التغير بالتوالي ٣٧٤

في بعض نظريات يمكن بواسطتها ان يعلم ان كل معادلة لها جذر حقيقية وفي

هذه النظرية وهي ان كل معادلة لها جذر ٣٧٦

في الارتباطات الواقعة بين مكررات المعادلة وجذورها ٣٩١

في تحويل المعادلات ٤٠٠

في قاعدة العلامات للمعلم ديكار ٤٠٨

الباب العاشر

في البحث

١٥ - ١٥ - ١٥

١٥  
١٥

طريقة المكرات غير المعينة

١

١٥

١٥

بسم الله الرحمن الرحيم

الدرجة الثانية والقيصرية في معرفة المعادلات

الحكمة والمعادلات ذات الحدود والمعادلات

الدرجة الثالثة والمعادلات المنحوية على المجهول

تحت الحد

الدرجة الثانية

الدرجة الثالثة

الدرجة الرابعة

الدرجة الخامسة

في تحويل المعادلات إلى الصورة

الدرجة السادسة

الدرجة السابعة

الدرجة الثامنة

الدرجة التاسعة

الدرجة العاشرة

الدرجة العاشرة



٣٥٦١٧

الجبر والفاني من المستخرج القهرية - د = هـ - و  
في الاعمال الجبرية

طبع بمطبعة مدرسة المهندسخانة الخديوية

١٤٦٨

1

1

7

(١٥٧)

ويستخرج من المتساوية  $ح + و = هـ + ز$  أن  $ز - هـ = و - ح$   
 أعني إذا ساوى حاصل جمع عدد دين حاصل جمع عدد آخرين تركب من هذه الأعداد الأربعة  
 متساوية عدد يجزأ أحد الحاصلين طرفها وجزأ الآخر وسطها  
 والوسط النفاض على عدد دين يساوى نصف حاصل جمعها لأنه من المتساوية

$$ح : و :: ز : هـ \quad \text{يحدث}$$

$$ح : و :: ز : هـ \quad \text{ومن هذه المتساوية يستخرج}$$

$$\frac{ح}{و} = \frac{ز}{هـ}$$

في المتساوية الهندسية

٩٣ عند كل متساوية هندسية كالمتساوية  $ح : ز :: و : هـ$

نوضع هكذا  $\frac{ح}{و} = \frac{ز}{هـ}$  ومن هذه المتساوية يستخرج

$$ح = و \cdot \frac{ز}{هـ} \quad , \quad و = هـ \cdot \frac{ح}{ز} \quad , \quad \frac{ح}{و} = \frac{هـ}{ز}$$

أعني أن كل متساوية هندسية حاصل ضرب طرفيها يساوى حاصل ضرب وسطيهما  
 وأن أحد طرفيها يساوى خارج قيمة حاصل ضرب وسطيهما على طرفها الآخر وأن  
 أحد وسطيهما يساوى خارج قيمة حاصل ضرب طرفيها على الوسط الآخر

ويستخرج من كل متساوية كالمتساوية  $ح = و \cdot \frac{ز}{هـ}$  أن  $\frac{ح}{و} = \frac{ز}{هـ}$

أعني متى كان حاصل ضرب عدد دين ساوياً حاصل ضرب عدد دين آخرين تركب  
 من هذه الأربعة أعداد متساوية هندسية أصلاً أحد الحاصلين من الطرفين

بسم الله الرحمن الرحيم

## الباب الرابع

في امتسابات ومتواليات العددية والهندسية والمتباينات والكسور المتسلسلة  
وأكل غير المعين للمعادلات ذات الدرجة الأولى  
في المتسلسلة العددية أي المتناظرة

نقد براهين خصوص المتناسبة المقررة في كتب علم الحساب فهل جذا بواسطة القواعد  
الجبرية وبيان ذلك أن يقال  
كل متسلسلة عددية كالمتسلسلة

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots$$

توضع هكذا

$$1 - 2 = -1, 2 - 3 = -1, 3 - 4 = -1, \dots$$

أو  $1 + 2 = 3, 2 + 3 = 5, 3 + 4 = 7, \dots$   
أعني أن كل متسلسلة عددية حاصل جمع طرفيها يساوي حاصل جمع وسطيهما  
وأن أحد طرفيها يساوي حاصل جمع وسطيهما منقوصاً منه الطرف الآخر  
وأن أحد وسطيهما يساوي حاصل جمع طرفيها منقوصاً منه الوسط الآخر  
ونستخرج

(١٤٩)

وإذا كان لتاسعين نسبة مشتركة تركيب من النسبتين الآخريين متساوية فالناتجة

ه: د :: ه: و , ح: د :: ه: و يرصعان هكذا

$\frac{ه}{و} = \frac{ح}{د}$  ,  $\frac{ه}{و} = \frac{ج}{د}$  ومن هاتين المتساويتين يحدث

$\frac{ه}{و} = \frac{ج}{د}$  أي ه: و :: ج: د

ومتى اتحد المقدمات أو التاليان في متساويتين تركيب من غير المتحد منها متساوية

لأنه إذا فرضنا للتساويان ه: د :: و: ه: و , ح: د :: ج: د أو

د: ح :: و: ه: , ج: د :: و: ه:

استخرج منها بمقتضى ما تقدم

ه: د :: د: و , ح: د :: و: ه: فإذ يحدث

د: و :: و: ه: أي د: ه: :: و: و

وكل متساوية هندسية كالمتساوية ه: د :: د: ه: و يمكن وضعها

هكذا  $\frac{ه}{و} = \frac{و}{د}$  وبإضافة واحد لكل من طرفي هذه المتساوية

أو طرحه منها نؤول إلى

$$\frac{ه}{و} \pm 1 = 1 \pm \frac{ه}{و} \text{ أي}$$

$$\frac{ه \pm و}{و} = \frac{و \pm ه}{و} \text{ ومنها يحدث}$$

ه+د: د :: و+ه: و , ح-د: د :: و-ه: و

ويحدث أيضاً من مقارنة المتساوية ه: د :: و: ه: مع كل من المتساويتين

واصل الحاصل الآخر وسطانها

ويستنتج من المتساوية  $دو = د ه$  بنا على ما تقدم ثمان متناسبات

$$د : د :: د : د \quad د : د :: د : د \quad د : د :: د : د$$

$$د : د :: د : د \quad د : د :: د : د \quad د : د :: د : د$$

فيشاهد من متناسبات الصف الاول الأربعة أن الأربعة الأعداد متناسبة

مع بعضها فيكون منها متناسبة ايضاً بتغيير موضع الوسطين أو الطرفين

ويشاهد ايضاً من متناسبات الصف الثاني الأربعة ان التناسب لا يتغير

بتغيير الطرفين بالوسطين والوسطين بالطرفين

والوسط الهندسي بين عددين أو كيتين يساوي جذر حاصل ضربهما لانه من

المتناسبة  $د : س :: س : د$  يحدث

$$س = \sqrt{د \times د} \quad \text{أو} \quad س = \sqrt{د \times د}$$

واذا ضرب طرف ووسط متناسبة في عدد واحد أو قسما عليه بقيت المتناسبة

على حالها لانه يستنتج من المتساوية  $\frac{د}{س} = \frac{د}{س}$  أن

$$\frac{د}{س} = \frac{د}{س} \quad \text{أو} \quad د : س :: د : س$$

ويستنتج ايضاً من المتساوية المذكورة  $\frac{د}{س} = \frac{د}{س}$  ومن هذه يحدث

$$\frac{د}{س} = \frac{د}{س} \quad \text{أي} \quad د : س :: د : س$$

وعلى هذا يبرهن على حالة القسمة

تسمى متناسبة متوالية

وكل متناسبة متوالية حاصل جمع مقدماتها الى حاصل جمع تالياتها كنية اثنى مقدم  
اثنى تاليه فاذا رمز للنسبة المشتركة في هذه المتناسبة بالحرف ل تحصل  
 $\frac{د}{و} = ل , \frac{ل}{ر} = ل , \frac{ر}{ج} = ل , \frac{ج}{ط} = ل , \dots \dots \dots$  الخ

ومنها يحدث

$$د = ل \cdot و , ل = ل \cdot ر , ر = ل \cdot ج , ج = ل \cdot ط , \dots \dots \dots$$

وتجميع هذه المتساويات طرفاً الى طرف يحدث

$$د + ل + ر + ج + ط + \dots = ل (و + ر + ج + ط + \dots)$$

ومنها يحدث

$$\frac{د + ل + ر + ج + ط + \dots}{د + ل + ر + ج + ط + \dots} = \frac{ل (و + ر + ج + ط + \dots)}{و + ر + ج + ط + \dots} = ل$$

$$\frac{د + ل + ر + ج + ط + \dots}{د + ل + ر + ج + ط + \dots} = ل$$

واذا ضربت جملة مناسبات بالترتيب في بعضها نكوّن من حواصل الضرب

الاربعة المختلفة متناسبة فالمناسبات

$$\frac{د}{و} = ل , \frac{ل}{ر} = ل , \frac{ر}{ج} = ل , \frac{ج}{ط} = ل$$

$$\frac{د}{و} = ل , \frac{ل}{ر} = ل , \frac{ر}{ج} = ل , \frac{ج}{ط} = ل$$

$$\frac{د \cdot ل \cdot ر \cdot ج}{و \cdot ر \cdot ج \cdot ط} = ل \cdot ل \cdot ل \cdot ل$$

واذا رفع كل من الحدود الاربعة لمناسبة الى درجة ما أو اخذ جذر كل منها





(17)

ويلغض بها ح ائى ء الى ه الى و ائى .... الخ  
 واذا رمز للأساس بالحرف س وللمحد الاول بالحرف ح وللمحد الأخير  
 المسبوق بمحد و عدد ها ٢-١ بالحرف ن فخص بقتضى التعريف  

$$س = ح + س \quad س = ه + س \quad س = و + س \quad س = ل + س \quad س = ائى$$

$$س = ح + س \quad س = ه + س \quad س = و + س \quad س = ل + س \quad س = ائى$$
 ثم تأخذ من متوالية عددية بباوى المحد الاول مضافا اليه حاصل  
 ضرب عدد المحد و السابق له فى الأساس

وحيث أن المعادلة  $n = a + (a-1) + \dots + 1$  تشمل على أربع  
كميات فلا يمكن ادراكها الا بعد معرفة نتائج الأخرى

وإذا أريد إدخال جملة حدود وعدادها  $m$  بين أي حدين معلومين بشرط أن يتركب  
مراجع متوالية عديدة شأن هذه المتوالية لا تحتاج في تركها إلا للقياس  
أساسها الجهول ولا يستخرج من معادلة (١)

$$\frac{2-0}{1-2} = 2$$

رجب کا دن  $2 = 3 + 4$  یوں

$$\frac{2-0}{155} =$$

عني أن أساس المتوالية المطلوبة يساوي خارج قيمة فاضل الحدين العنوين

بدرجة واحدة لم تنزل تناسبية

فالتناسبية  $٤:٥::٥:٦$  و  $٥:٦::٦:٧$  نوضع هكذا

$\frac{٤}{٥} = \frac{٥}{٦}$  فاذا رفع طرفا هذه المتساوية لدرجة ما أو اخذ جذراها

بدرجة ما بقيت على حالها فيكون

$$\frac{٤}{٥} = \frac{٥}{٦} , \frac{٤}{٥} = \frac{٥}{٦} \text{ ومنها يحدث}$$

$$٤:٥::٥:٦ , ٤:٥::٥:٦ , ٤:٥::٥:٦$$

### في المتواليات العددية

٩٦  
تتبع كل متسلسلة مركبة من حدود يزيد أحد ها عن سابقه أو ينقص عنه بكمية ثابتة  
تسمى متوالية عددية أو تفاضلية والكمية الثابتة تسمى أساس المتواليه  
فالمتسلسلان

$$١, ٤, ٧, ١٠, ١٣, ١٦, ١٩, ٢٢, ٢٥, ٢٨, ٣١, ٣٤, ٣٧, ٤٠, ٤٣, ٤٦, ٤٩, ٥٢, ٥٥, ٥٨, ٦١, ٦٤, ٦٧, ٧٠, ٧٣, ٧٦, ٧٩, ٨٢, ٨٥, ٨٨, ٩١, ٩٤, ٩٧, ١٠٠, ١٠٣, ١٠٦, ١٠٩, ١١٢, ١١٥, ١١٨, ١٢١, ١٢٤, ١٢٧, ١٣٠, ١٣٣, ١٣٦, ١٣٩, ١٤٢, ١٤٥, ١٤٨, ١٥١, ١٥٤, ١٥٧, ١٦٠, ١٦٣, ١٦٦, ١٦٩, ١٧٢, ١٧٥, ١٧٨, ١٨١, ١٨٤, ١٨٧, ١٩٠, ١٩٣, ١٩٦, ١٩٩, ٢٠٢, ٢٠٥, ٢٠٨, ٢١١, ٢١٤, ٢١٧, ٢٢٠, ٢٢٣, ٢٢٦, ٢٢٩, ٢٣٢, ٢٣٥, ٢٣٨, ٢٤١, ٢٤٤, ٢٤٧, ٢٥٠, ٢٥٣, ٢٥٦, ٢٥٩, ٢٦٢, ٢٦٥, ٢٦٨, ٢٧١, ٢٧٤, ٢٧٧, ٢٨٠, ٢٨٣, ٢٨٦, ٢٨٩, ٢٩٢, ٢٩٥, ٢٩٨, ٣٠١, ٣٠٤, ٣٠٧, ٣١٠, ٣١٣, ٣١٦, ٣١٩, ٣٢٢, ٣٢٥, ٣٢٨, ٣٣١, ٣٣٤, ٣٣٧, ٣٤٠, ٣٤٣, ٣٤٦, ٣٤٩, ٣٥٢, ٣٥٥, ٣٥٨, ٣٦١, ٣٦٤, ٣٦٧, ٣٧٠, ٣٧٣, ٣٧٦, ٣٧٩, ٣٨٢, ٣٨٥, ٣٨٨, ٣٩١, ٣٩٤, ٣٩٧, ٤٠٠, ٤٠٣, ٤٠٦, ٤٠٩, ٤١٢, ٤١٥, ٤١٨, ٤٢١, ٤٢٤, ٤٢٧, ٤٣٠, ٤٣٣, ٤٣٦, ٤٣٩, ٤٤٢, ٤٤٥, ٤٤٨, ٤٥١, ٤٥٤, ٤٥٧, ٤٦٠, ٤٦٣, ٤٦٦, ٤٦٩, ٤٧٢, ٤٧٥, ٤٧٨, ٤٨١, ٤٨٤, ٤٨٧, ٤٩٠, ٤٩٣, ٤٩٦, ٤٩٩, ٥٠٢, ٥٠٥, ٥٠٨, ٥١١, ٥١٤, ٥١٧, ٥٢٠, ٥٢٣, ٥٢٦, ٥٢٩, ٥٣٢, ٥٣٥, ٥٣٨, ٥٤١, ٥٤٤, ٥٤٧, ٥٥٠, ٥٥٣, ٥٥٦, ٥٥٩, ٥٦٢, ٥٦٥, ٥٦٨, ٥٧١, ٥٧٤, ٥٧٧, ٥٨٠, ٥٨٣, ٥٨٦, ٥٨٩, ٥٩٢, ٥٩٥, ٥٩٨, ٦٠١, ٦٠٤, ٦٠٧, ٦١٠, ٦١٣, ٦١٦, ٦١٩, ٦٢٢, ٦٢٥, ٦٢٨, ٦٣١, ٦٣٤, ٦٣٧, ٦٤٠, ٦٤٣, ٦٤٦, ٦٤٩, ٦٥٢, ٦٥٥, ٦٥٨, ٦٦١, ٦٦٤, ٦٦٧, ٦٧٠, ٦٧٣, ٦٧٦, ٦٧٩, ٦٨٢, ٦٨٥, ٦٨٨, ٦٩١, ٦٩٤, ٦٩٧, ٧٠٠, ٧٠٣, ٧٠٦, ٧٠٩, ٧١٢, ٧١٥, ٧١٨, ٧٢١, ٧٢٤, ٧٢٧, ٧٣٠, ٧٣٣, ٧٣٦, ٧٣٩, ٧٤٢, ٧٤٥, ٧٤٨, ٧٥١, ٧٥٤, ٧٥٧, ٧٦٠, ٧٦٣, ٧٦٦, ٧٦٩, ٧٧٢, ٧٧٥, ٧٧٨, ٧٨١, ٧٨٤, ٧٨٧, ٧٩٠, ٧٩٣, ٧٩٦, ٧٩٩, ٨٠٢, ٨٠٥, ٨٠٨, ٨١١, ٨١٤, ٨١٧, ٨٢٠, ٨٢٣, ٨٢٦, ٨٢٩, ٨٣٢, ٨٣٥, ٨٣٨, ٨٤١, ٨٤٤, ٨٤٧, ٨٥٠, ٨٥٣, ٨٥٦, ٨٥٩, ٨٦٢, ٨٦٥, ٨٦٨, ٨٧١, ٨٧٤, ٨٧٧, ٨٨٠, ٨٨٣, ٨٨٦, ٨٨٩, ٨٩٢, ٨٩٥, ٨٩٨, ٩٠١, ٩٠٤, ٩٠٧, ٩١٠, ٩١٣, ٩١٦, ٩١٩, ٩٢٢, ٩٢٥, ٩٢٨, ٩٣١, ٩٣٤, ٩٣٧, ٩٤٠, ٩٤٣, ٩٤٦, ٩٤٩, ٩٥٢, ٩٥٥, ٩٥٨, ٩٦١, ٩٦٤, ٩٦٧, ٩٧٠, ٩٧٣, ٩٧٦, ٩٧٩, ٩٨٢, ٩٨٥, ٩٨٨, ٩٩١, ٩٩٤, ٩٩٧, ١٠٠٠, ١٠٠٣, ١٠٠٦, ١٠٠٩, ١٠١٢, ١٠١٥, ١٠١٨, ١٠٢١, ١٠٢٤, ١٠٢٧, ١٠٣٠, ١٠٣٣, ١٠٣٦, ١٠٣٩, ١٠٤٢, ١٠٤٥, ١٠٤٨, ١٠٥١, ١٠٥٤, ١٠٥٧, ١٠٦٠, ١٠٦٣, ١٠٦٦, ١٠٦٩, ١٠٧٢, ١٠٧٥, ١٠٧٨, ١٠٨١, ١٠٨٤, ١٠٨٧, ١٠٩٠, ١٠٩٣, ١٠٩٦, ١٠٩٩, ١١٠٢, ١١٠٥, ١١٠٨, ١١١١, ١١١٤, ١١١٧, ١١٢٠, ١١٢٣, ١١٢٦, ١١٢٩, ١١٣٢, ١١٣٥, ١١٣٨, ١١٤١, ١١٤٤, ١١٤٧, ١١٥٠, ١١٥٣, ١١٥٦, ١١٥٩, ١١٦٢, ١١٦٥, ١١٦٨, ١١٧١, ١١٧٤, ١١٧٧, ١١٨٠, ١١٨٣, ١١٨٦, ١١٨٩, ١١٩٢, ١١٩٥, ١١٩٨, ١٢٠١, ١٢٠٤, ١٢٠٧, ١٢١٠, ١٢١٣, ١٢١٦, ١٢١٩, ١٢٢٢, ١٢٢٥, ١٢٢٨, ١٢٣١, ١٢٣٤, ١٢٣٧, ١٢٤٠, ١٢٤٣, ١٢٤٦, ١٢٤٩, ١٢٥٢, ١٢٥٥, ١٢٥٨, ١٢٦١, ١٢٦٤, ١٢٦٧, ١٢٧٠, ١٢٧٣, ١٢٧٦, ١٢٧٩, ١٢٨٢, ١٢٨٥, ١٢٨٨, ١٢٩١, ١٢٩٤, ١٢٩٧, ١٣٠٠, ١٣٠٣, ١٣٠٦, ١٣٠٩, ١٣١٢, ١٣١٥, ١٣١٨, ١٣٢١, ١٣٢٤, ١٣٢٧, ١٣٣٠, ١٣٣٣, ١٣٣٦, ١٣٣٩, ١٣٤٢, ١٣٤٥, ١٣٤٨, ١٣٥١, ١٣٥٤, ١٣٥٧, ١٣٦٠, ١٣٦٣, ١٣٦٦, ١٣٦٩, ١٣٧٢, ١٣٧٥, ١٣٧٨, ١٣٨١, ١٣٨٤, ١٣٨٧, ١٣٩٠, ١٣٩٣, ١٣٩٦, ١٣٩٩, ١٤٠٢, ١٤٠٥, ١٤٠٨, ١٤١١, ١٤١٤, ١٤١٧, ١٤٢٠, ١٤٢٣, ١٤٢٦, ١٤٢٩, ١٤٣٢, ١٤٣٥, ١٤٣٨, ١٤٤١, ١٤٤٤, ١٤٤٧, ١٤٥٠, ١٤٥٣, ١٤٥٦, ١٤٥٩, ١٤٦٢, ١٤٦٥, ١٤٦٨, ١٤٧١, ١٤٧٤, ١٤٧٧, ١٤٨٠, ١٤٨٣, ١٤٨٦, ١٤٨٩, ١٤٩٢, ١٤٩٥, ١٤٩٨, ١٥٠١, ١٥٠٤, ١٥٠٧, ١٥١٠, ١٥١٣, ١٥١٦, ١٥١٩, ١٥٢٢, ١٥٢٥, ١٥٢٨, ١٥٣١, ١٥٣٤, ١٥٣٧, ١٥٤٠, ١٥٤٣, ١٥٤٦, ١٥٤٩, ١٥٥٢, ١٥٥٥, ١٥٥٨, ١٥٦١, ١٥٦٤, ١٥٦٧, ١٥٧٠, ١٥٧٣, ١٥٧٦, ١٥٧٩, ١٥٨٢, ١٥٨٥, ١٥٨٨, ١٥٩١, ١٥٩٤, ١٥٩٧, ١٦٠٠, ١٦٠٣, ١٦٠٦, ١٦٠٩, ١٦١٢, ١٦١٥, ١٦١٨, ١٦٢١, ١٦٢٤, ١٦٢٧, ١٦٣٠, ١٦٣٣, ١٦٣٦, ١٦٣٩, ١٦٤٢, ١٦٤٥, ١٦٤٨, ١٦٥١, ١٦٥٤, ١٦٥٧, ١٦٦٠, ١٦٦٣, ١٦٦٦, ١٦٦٩, ١٦٧٢, ١٦٧٥, ١٦٧٨, ١٦٨١, ١٦٨٤, ١٦٨٧, ١٦٩٠, ١٦٩٣, ١٦٩٦, ١٦٩٩, ١٧٠٢, ١٧٠٥, ١٧٠٨, ١٧١١, ١٧١٤, ١٧١٧, ١٧٢٠, ١٧٢٣, ١٧٢٦, ١٧٢٩, ١٧٣٢, ١٧٣٥, ١٧٣٨, ١٧٤١, ١٧٤٤, ١٧٤٧, ١٧٥٠, ١٧٥٣, ١٧٥٦, ١٧٥٩, ١٧٦٢, ١٧٦٥, ١٧٦٨, ١٧٧١, ١٧٧٤, ١٧٧٧, ١٧٨٠, ١٧٨٣, ١٧٨٦, ١٧٨٩, ١٧٩٢, ١٧٩٥, ١٧٩٨, ١٨٠١, ١٨٠٤, ١٨٠٧, ١٨١٠, ١٨١٣, ١٨١٦, ١٨١٩, ١٨٢٢, ١٨٢٥, ١٨٢٨, ١٨٣١, ١٨٣٤, ١٨٣٧, ١٨٤٠, ١٨٤٣, ١٨٤٦, ١٨٤٩, ١٨٥٢, ١٨٥٥, ١٨٥٨, ١٨٦١, ١٨٦٤, ١٨٦٧, ١٨٧٠, ١٨٧٣, ١٨٧٦, ١٨٧٩, ١٨٨٢, ١٨٨٥, ١٨٨٨, ١٨٩١, ١٨٩٤, ١٨٩٧, ١٩٠٠, ١٩٠٣, ١٩٠٦, ١٩٠٩, ١٩١٢, ١٩١٥, ١٩١٨, ١٩٢١, ١٩٢٤, ١٩٢٧, ١٩٣٠, ١٩٣٣, ١٩٣٦, ١٩٣٩, ١٩٤٢, ١٩٤٥, ١٩٤٨, ١٩٥١, ١٩٥٤, ١٩٥٧, ١٩٦٠, ١٩٦٣, ١٩٦٦, ١٩٦٩, ١٩٧٢, ١٩٧٥, ١٩٧٨, ١٩٨١, ١٩٨٤, ١٩٨٧, ١٩٩٠, ١٩٩٣, ١٩٩٦, ٢٠٠٠, ٢٠٠٣, ٢٠٠٦, ٢٠٠٩, ٢٠١٢, ٢٠١٥, ٢٠١٨, ٢٠٢١, ٢٠٢٤, ٢٠٢٧, ٢٠٣٠, ٢٠٣٣, ٢٠٣٦, ٢٠٣٩, ٢٠٤٢, ٢٠٤٥, ٢٠٤٨, ٢٠٥١, ٢٠٥٤, ٢٠٥٧, ٢٠٦٠, ٢٠٦٣, ٢٠٦٦, ٢٠٦٩, ٢٠٧٢, ٢٠٧٥, ٢٠٧٨, ٢٠٨١, ٢٠٨٤, ٢٠٨٧, ٢٠٩٠, ٢٠٩٣, ٢٠٩٦, ٢٠٩٩, ٢١٠٢, ٢١٠٥, ٢١٠٨, ٢١١١, ٢١١٤, ٢١١٧, ٢١٢٠, ٢١٢٣, ٢١٢٦, ٢١٢٩, ٢١٣٢, ٢١٣٥, ٢١٣٨, ٢١٤١, ٢١٤٤, ٢١٤٧, ٢١٥٠, ٢١٥٣, ٢١٥٦, ٢١٥٩, ٢١٦٢, ٢١٦٥, ٢١٦٨, ٢١٧١, ٢١٧٤, ٢١٧٧, ٢١٨٠, ٢١٨٣, ٢١٨٦, ٢١٨٩, ٢١٩٢, ٢١٩٥, ٢١٩٨, ٢٢٠١, ٢٢٠٤, ٢٢٠٧, ٢٢١٠, ٢٢١٣, ٢٢١٦, ٢٢١٩, ٢٢٢٢, ٢٢٢٥, ٢٢٢٨, ٢٢٣١, ٢٢٣٤, ٢٢٣٧, ٢٢٤٠, ٢٢٤٣, ٢٢٤٦, ٢٢٤٩, ٢٢٥٢, ٢٢٥٥, ٢٢٥٨, ٢٢٦١, ٢٢٦٤, ٢٢٦٧, ٢٢٧٠, ٢٢٧٣, ٢٢٧٦, ٢٢٧٩, ٢٢٨٢, ٢٢٨٥, ٢٢٨٨, ٢٢٩١, ٢٢٩٤, ٢٢٩٧, ٢٣٠٠, ٢٣٠٣, ٢٣٠٦, ٢٣٠٩, ٢٣١٢, ٢٣١٥, ٢٣١٨, ٢٣٢١, ٢٣٢٤, ٢٣٢٧, ٢٣٣٠, ٢٣٣٣, ٢٣٣٦, ٢٣٣٩, ٢٣٤٢, ٢٣٤٥, ٢٣٤٨, ٢٣٥١, ٢٣٥٤, ٢٣٥٧, ٢٣٦٠, ٢٣٦٣, ٢٣٦٦, ٢٣٦٩, ٢٣٧٢, ٢٣٧٥, ٢٣٧٨, ٢٣٨١, ٢٣٨٤, ٢٣٨٧, ٢٣٩٠, ٢٣٩٣, ٢٣٩٦, ٢٣٩٩, ٢٤٠٢, ٢٤٠٥, ٢٤٠٨, ٢٤١١, ٢٤١٤, ٢٤١٧, ٢٤٢٠, ٢٤٢٣, ٢٤٢٦, ٢٤٢٩, ٢٤٣٢, ٢٤٣٥, ٢٤٣٨, ٢٤٤١, ٢٤٤٤, ٢٤٤٧, ٢٤٥٠, ٢٤٥٣, ٢٤٥٦, ٢٤٥٩, ٢٤٦٢, ٢٤٦٥, ٢٤٦٨, ٢٤٧١, ٢٤٧٤, ٢٤٧٧, ٢٤٨٠, ٢٤٨٣, ٢٤٨٦, ٢٤٨٩, ٢٤٩٢, ٢٤٩٥, ٢٤٩٨, ٢٥٠١, ٢٥٠٤, ٢٥٠٧, ٢٥١٠, ٢٥١٣, ٢٥١٦, ٢٥١٩, ٢٥٢٢, ٢٥٢٥, ٢٥٢٨, ٢٥٣١, ٢٥٣٤, ٢٥٣٧, ٢٥٤٠, ٢٥٤٣, ٢٥٤٦, ٢٥٤٩, ٢٥٥٢, ٢٥٥٥, ٢٥٥٨, ٢٥٦١, ٢٥٦٤, ٢٥٦٧, ٢٥٧٠, ٢٥٧٣, ٢٥٧٦, ٢٥٧٩, ٢٥٨٢, ٢٥٨٥, ٢٥٨٨, ٢٥٩١, ٢٥٩٤, ٢٥٩٧, ٢٦٠٠, ٢٦٠٣, ٢٦٠٦, ٢٦٠٩, ٢٦١٢, ٢٦١٥, ٢٦١٨, ٢٦٢١, ٢٦٢٤, ٢٦٢٧, ٢٦٣٠, ٢٦٣٣, ٢٦٣٦, ٢٦٣٩, ٢٦٤٢, ٢٦٤٥, ٢٦٤٨, ٢٦٥١, ٢٦٥٤, ٢٦٥٧, ٢٦٦٠, ٢٦٦٣, ٢٦٦٦, ٢٦٦٩, ٢٦٧٢, ٢٦٧٥, ٢٦٧٨, ٢٦٨١, ٢٦٨٤, ٢٦٨٧, ٢٦٩٠, ٢٦٩٣, ٢٦٩٦, ٢٦٩٩, ٢٧٠٢, ٢٧٠٥, ٢٧٠٨, ٢٧١١, ٢٧١٤, ٢٧١٧, ٢٧٢٠, ٢٧٢٣, ٢٧٢٦, ٢٧٢٩, ٢٧٣٢, ٢٧٣٥, ٢٧٣٨, ٢٧٤١, ٢٧٤٤, ٢٧٤٧, ٢٧٥٠, ٢٧٥٣, ٢٧٥٦, ٢٧٥٩, ٢٧٦٢, ٢٧٦٥, ٢٧٦٨, ٢٧٧١, ٢٧٧٤, ٢٧٧٧, ٢٧٨٠, ٢٧٨٣, ٢٧٨٦, ٢٧٨٩, ٢٧٩٢, ٢٧٩٥, ٢٧٩٨, ٢٨٠١, ٢٨٠٤, ٢٨٠٧, ٢٨١٠, ٢٨١٣, ٢٨١٦, ٢٨١٩, ٢٨٢٢, ٢٨٢٥, ٢٨٢٨, ٢٨٣١, ٢٨٣٤, ٢٨٣٧, ٢٨٤٠, ٢٨٤٣, ٢٨٤٦, ٢٨٤٩, ٢٨٥٢, ٢٨٥٥, ٢٨٥٨, ٢٨٦١, ٢٨٦٤, ٢٨٦٧, ٢٨٧٠, ٢٨٧٣, ٢٨٧٦, ٢٨٧٩, ٢٨٨٢, ٢٨٨٥, ٢٨٨٨, ٢٨٩١, ٢٨٩٤, ٢٨٩٧, ٢٩٠٠, ٢٩٠٣, ٢٩٠٦, ٢٩٠٩, ٢٩١٢, ٢٩١٥, ٢٩١٨, ٢٩٢١, ٢٩٢٤, ٢٩٢٧, ٢٩٣٠, ٢٩٣٣, ٢٩٣٦, ٢٩٣٩, ٢٩٤٢, ٢٩٤٥, ٢٩٤٨, ٢٩٥١, ٢٩٥٤, ٢٩٥٧, ٢٩٦٠, ٢٩٦٣, ٢٩٦٦, ٢٩٦٩, ٢٩٧٢, ٢٩٧٥, ٢٩٧٨, ٢٩٨١, ٢٩٨٤, ٢٩٨٧, ٢٩٩٠, ٢٩٩٣, ٢٩٩٦, ٣٠٠٠, ٣٠٠٣, ٣٠٠٦, ٣٠٠٩, ٣٠١٢, ٣٠١٥, ٣٠١٨, ٣٠٢١, ٣٠٢٤, ٣٠٢٧, ٣٠٣٠, ٣٠٣٣, ٣٠٣٦, ٣٠٣٩, ٣٠٤٢, ٣٠٤٥, ٣٠٤٨, ٣٠٥١, ٣٠٥٤, ٣٠٥٧, ٣٠٦٠, ٣٠٦٣, ٣٠٦٦, ٣٠٦٩, ٣٠٧٢, ٣٠٧٥, ٣٠٧٨, ٣٠٨١, ٣٠٨٤, ٣٠٨٧, ٣٠٩٠, ٣٠٩٣, ٣٠٩٦, ٣٠٩٩, ٣١٠٢, ٣١٠٥, ٣١٠٨, ٣١١١, ٣١١٤, ٣١١٧, ٣١٢٠, ٣١٢٣, ٣١٢٦, ٣١٢٩, ٣١٣٢, ٣١٣٥, ٣١٣٨, ٣١٤١, ٣١٤٤, ٣١٤٧, ٣١٥٠, ٣١٥٣, ٣١٥٦, ٣١٥٩, ٣١٦٢, ٣١٦٥, ٣١٦٨, ٣١٧١, ٣١٧٤, ٣١٧٧, ٣١٨٠, ٣١٨٣, ٣١٨٦, ٣١٨٩, ٣١٩٢, ٣١٩٥, ٣١٩٨, ٣٢٠١, ٣٢٠٤, ٣٢٠٧, ٣٢١٠, ٣٢١٣, ٣٢١٦, ٣٢١٩, ٣٢٢٢, ٣٢٢٥, ٣٢٢٨, ٣٢٣١, ٣٢٣٤, ٣٢٣٧, ٣٢٤٠, ٣٢٤٣, ٣٢٤٦, ٣٢٤٩, ٣٢٥٢, ٣٢٥٥, ٣٢٥٨, ٣٢٦١, ٣٢٦٤, ٣٢٦٧, ٣٢٧٠, ٣٢٧٣, ٣٢٧٦, ٣٢٧٩, ٣٢٨٢, ٣٢٨٥, ٣٢٨٨, ٣٢٩١, ٣٢٩٤, ٣٢٩٧, ٣٣٠٠, ٣٣٠٣, ٣٣٠٦, ٣٣٠٩, ٣٣١٢, ٣٣١٥, ٣٣١٨, ٣٣٢١, ٣٣٢٤, ٣٣٢٧, ٣٣٣٠, ٣٣٣٣, ٣٣٣٦, ٣٣٣٩, ٣٣٤٢, ٣٣٤٥, ٣٣٤٨, ٣٣٥١, ٣٣٥٤, ٣٣٥٧, ٣٣٦٠, ٣٣٦٣, ٣٣٦٦, ٣٣٦٩, ٣٣٧٢, ٣٣٧٥, ٣٣٧٨, ٣٣٨١, ٣٣٨٤, ٣٣٨٧, ٣٣٩٠, ٣٣٩٣, ٣٣٩٦, ٣٣٩٩, ٣٤٠٢, ٣٤٠٥, ٣٤٠٨, ٣٤١١, ٣٤١٤, ٣٤١٧, ٣٤٢٠, ٣٤٢٣, ٣٤٢٦, ٣٤٢٩, ٣٤٣٢, ٣٤٣٥, ٣٤٣٨, ٣٤٤١, ٣٤٤٤, ٣٤٤٧, ٣٤٥٠, ٣٤٥٣, ٣٤٥٦, ٣٤٥٩, ٣٤٦٢, ٣٤٦٥, ٣٤٦٨, ٣٤٧١, ٣٤٧٤, ٣٤٧٧, ٣٤٨٠, ٣٤٨٣, ٣٤٨٦, ٣٤٨٩, ٣٤٩٢, ٣٤٩٥, ٣٤٩٨, ٣٥٠١, ٣٥٠٤, ٣٥٠٧, ٣٥١٠, ٣٥١٣, ٣٥١٦, ٣٥١٩, ٣٥٢٢, ٣٥٢٥, ٣٥٢٨, ٣٥٣١, ٣٥٣٤, ٣٥٣٧, ٣٥٤٠, ٣٥٤٣, ٣٥٤٦, ٣٥٤٩, ٣٥٥٢, ٣٥٥٥, ٣٥٥٨, ٣٥٦١, ٣٥٦٤, ٣٥٦٧, ٣٥٧٠, ٣٥٧٣, ٣٥٧٦, ٣٥٧٩, ٣٥٨٢, ٣٥٨٥, ٣٥٨٨, ٣٥٩١, ٣٥٩٤, ٣٥٩٧, ٣٦٠٠, ٣٦٠٣, ٣٦٠٦, ٣٦٠٩, ٣٦١٢, ٣٦١٥, ٣٦١٨, ٣٦٢١, ٣٦٢٤, ٣٦٢٧, ٣٦٣٠, ٣٦٣٣, ٣٦٣٦, ٣٦٣٩, ٣٦٤٢, ٣٦٤٥, ٣٦٤٨, ٣٦٥١, ٣٦٥٤, ٣٦٥٧, ٣٦٦٠, ٣٦٦٣, ٣٦٦٦, ٣٦٦٩, ٣٦٧٢, ٣٦٧٥, ٣٦٧٨, ٣٦٨١, ٣٦٨٤, ٣٦٨٧, ٣٦٩٠, ٣٦٩٣, ٣٦٩٦, ٣٦٩٩, ٣٧٠٢, ٣٧٠٥, ٣٧٠٨, ٣٧١١, ٣٧١٤, ٣٧١٧, ٣٧٢٠, ٣٧٢٣, ٣٧٢٦, ٣٧٢٩, ٣٧٣٢, ٣٧٣٥, ٣٧٣٨, ٣٧٤١, ٣٧٤٤, ٣٧٤٧$$



(١٦٦)

على عدد الحدود المدخلة زائداً واحداً

فإذا اردنا إدخال ثمانية حدود بين العددين ٤٩ ، ٤ بجث يتركب من

الجميع متوالية عددية وضع في المعادلة  $r = \frac{ل-م}{١+٣}$  بدل ل ، م ،مقاديرها وهي ٨ ، ٤ ، ٤٩ فيحصل  $r = \frac{٤-٨}{١+٣} = \frac{-٤}{٤} = -١$ 

أعني أن الأساس المطلوب يساوي -١ وجنث تركب المتوالية هكذا

٤٩ ، ٤٨ ، ٣٩ ، ٣٤ ، ٢٩ ، ٢٤ ، ١٩ ، ١٤ ، ٩ ، ٤ ، ٠

وحاصل جمع كل حدين كائنين على ابعاد متساوية من طرفي متوالية يساوي

حاصل جمع هذين الطرفين من المتوالية العددية

بحصول  $٠ + ٤٩ = ٤٨ + ٠ = ٣٩ + ١ = ٣٤ + ٢ = ٢٩ + ٣ = ٢٤ + ٤ = ١٩ + ٥ = ١٤ + ٦ = ٩ + ٧ = ٤ + ٨$ ومنها يحدث  $٤٩ - ٠ = ٤٨ - ١ = ٣٩ - ٢ = ٣٤ - ٣ = ٢٩ - ٤ = ٢٤ - ٥ = ١٩ - ٦ = ١٤ - ٧ = ٩ - ٨$ 

$$٤٩ + ٠ = ٤٨ + ١ = ٣٩ + ٢ = ٣٤ + ٣ = ٢٩ + ٤ = ٢٤ + ٥ = ١٩ + ٦ = ١٤ + ٧ = ٩ + ٨$$

وقس على هذا

بنه وإذا اردت تحصيل مقدار حاصل جمع حدود متوالية عددية كالمتوالية

$$٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٣٩ ، ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٦ ، ٤٧ ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٥٩ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٢ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٥ ، ٦٦ ، ٦٧ ، ٦٨ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٣ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٧٦ ، ٧٧ ، ٧٨ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨١ ، ٨٢ ، ٨٣ ، ٨٤ ، ٨٥ ، ٨٦ ، ٨٧ ، ٨٨ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٩١ ، ٩٢ ، ٩٣ ، ٩٤ ، ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٧ ، ٩٨ ، ٩٩ ، ١٠٠$$

بحصول بالبناء على ما تقدم

$$ع = ٠ + ١٠٠ + (١ + ٩٩) + (٢ + ٩٨) + \dots + (٥٠ + ٥١) = ٥٠٠٠$$

بالد من الحرف ع لمقدار حاصل جمع حدود المتوالية المطلوب

ولا يخاد

(١٧)

من معادلة (١) مقدار  $\Delta$  فيكون

$$\Delta = \Delta - \Delta(1-2) \dots \dots \dots (2)$$

ثم يوضع مقدار  $\Delta$  في معادلة (٤) بدله ويستخرج مقدار  $\Delta$  فيجد

$$\frac{1}{r} = \frac{[ \Delta + \Delta ]}{[ \Delta + \Delta ]} \dots \dots \dots$$

وهو قانون يعلم منه مقدار المجهول  $\Delta$ فإذا فرض  $\Delta = 9$ ,  $\Delta = 8$ ,  $\Delta = 7$  حدث  $\Delta = 2$ ,  $\Delta = 2$ ,  $\Delta = 2$ وبناء عليه يكون مقدار  $\Delta$  المطابقا لتقديري  $\Delta$  والستخرجان من معادلة(٤) هما  $\Delta + 9$ ,  $\Delta - 3$  فيجد تحديث المتواليات

٩ + ٧ + ٥ + ٣ + ١ + ١ - ٣ - ١ + ١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩

وهذا الجدول لا يشمل على حل المسائل العشر المتقدمة ذكرناه هنا لمن يريد

الممارسة في ذلك

(١٦٦)

لأنه يتحصل دائماً معادلتان مختلفتان على مجهولين

ونقتصر على حل المسائل الآتية إلى الحل معادلة بدرجة ثانية فنقول

المسألة الأولى إذا علم  $٥, ٨, ١١$  وأريد تعيين  $٢, ٤$  بحذف المجهول  $٤$  من معادلتى (١), (٢) فيحصل

$$2 = \frac{1}{4} [7 - 5] \pm \frac{1}{4} [8 - 5] \dots \dots (3)$$

وإذا وضع بدل  $٢$  في المعادلة (١) مقداراه توصل إلى مقدارى  $٤$  المطابقين لها لكن لا إمكانية حل هذه المسألة يلزم أن يكون  $٢$  عددًا صحيحًا موجبًا

فإذا فرضنا قانون (٣)  $٢ = ٩ + ٤, ٤ = ١, ١ = ٥ - ٤$  حدث

$٢ = ٣ + ٧, ٢ = ٧ + ٤$  فإذا أحدث من قانون (١) المقداران

المطابقان للمجهول  $٤$  وهما  $٥ + ٣, ٣ - ٣$  وحيث كان لكل من المجهولين

مقداران يمكن تركيب متواليتين موافقتين لمنطوق المسألة هما

$$٢ \div ٥, ٧, ٩, ٣ \div ١, ٣, ٥, ٧, ٩, ٤ - ٣$$

وإذا فرضنا أيضًا في المعادلتين المتقدمتين  $٣ = ٥, ٤ = ١, ٤ = ٥ - ٣$

نحصل  $٢ = ٤, ٢ = ٦ - ٤$  ومن حيث أن  $٢$  ليس له المقدار

موجب لا يتحصل الامتالية موافقة لمنطوق المسألة هي

$$٢ \div ٣, ٥, ٧, ٩$$

المسألة الثانية إذا علم  $٤, ٨, ١١$  وأريد تعيين  $٢, ٤$  استخراج

الثالثة المطلوب معرفة عدد طابور مثلثي صفه الاول ينفر واحد والثاني نفران والثالث ثلاثة وهكذا المصف يكون عدد انفاره مساوياً ٢

الرابعة المطلوب ايجاد حاصل جمع حدود المتوالية الفردية  $\div 1, 3, 5, 7, 9, \dots$  التي عدد حدودها ٢

الخامسة طريق تعيين  $\frac{1}{2}$  عن تدرج بمقدار  $\frac{1}{2}$  ميتر يار وترميزها وقد عملت مقايسة ذلك فوجد انه يلزم لترميزها شحن مائة عربانه كل منها بعيدة عن مجاورتها بستة امتار بشرط ان يكون موضع العربانه الاولى على بعد من التل يساوي  $\frac{1}{2}$  ميتر وان ترجع العربانه الاخيرة الى المحل الذي شحنت منه والمطلوب معرفة عدد الأمتار التي يقطعها سراق العياقات في ترميز الطريق المذكورة

السادسة راجل يقطع عشرة فراسخ في اليوم الواحد وفارس يقطع في اول يوم ثلاثة فراسخ ويزيد سيره في كل يوم عن سابقه فرسخين سارا في آن واحد والمطلوب معرفة عدد الأيام التي تمضي من ابتداء سيرهما للنقطة تلاقيهما والمسافة التي يقطعها كل منهما

### في النويات التفسيرية أي الهندسية

كل متسلسلة مركبة من جملة حدود متتابعة خارج قيمة أحدها على سابقة ثابتة أو كل حد منها مساو لسابقه مضروباً في كمية ثابتة تسمى متوالية والكمية الثابتة تسمى اساس المتوالية

(١٦٨)

علايم مجاهيل

مقادير المجاهيل

$$1 \quad \frac{r}{p} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p+q}{p+q} = 1$$

$$2 \quad \frac{r}{p} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p+q}{p+q} = 1$$

$$3 \quad \frac{r}{p} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p+q}{p+q} = 1$$

$$4 \quad \frac{r}{p} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p+q}{p+q} = 1$$

$$5 \quad \frac{r}{p} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p+q}{p+q} = 1$$

$$6 \quad \frac{r}{p} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p+q}{p+q} = 1$$

$$7 \quad \frac{r}{p} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p+q}{p+q} = 1$$

$$8 \quad \frac{r}{p} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p+q}{p+q} = 1$$

$$9 \quad \frac{r}{p} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p+q}{p+q} = 1$$

$$10 \quad \frac{r}{p} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = \frac{p+q}{p+q} = 1$$

مسائل يطلب حلها من الطالب

١٧. الأول المطلوب تعيين الحد الأول وعدد الحدود ومن متوالية عددية أسسها  
٨ وحدها الأخير ١٨٥ وحاصل جمعها ٢٩٤٥

الثانية المطلوب إرجاع تسعة أواسط عددية بين أي حدين من المتوالية

٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٧

الثالثة



(٧١)  
واذا اريد تعيين احداتنا في عشر من المتواليه

$$\text{نبت } ٦٤ : ١٦ : ٤ : ١ : \frac{1}{4} \text{ فانه ينحصر}$$

$$٦٤ \times (\frac{1}{4}) = \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{1} = ٤ \text{ وهو الحد الرابع المطلوب}$$

ويستعمل القانون ل = ح<sup>٢</sup> لادخال جمله حد . عدد هـ م بين  
كيتين معلوتين ح ل ليترب من كل متواليه هندسية وجبر  
أن عدد الحد والدخلة م يكون عدد حدود متواليه المراد تحصيلها  
٢ + م ويكون الحد الأخير منها ل = ح<sup>٢</sup> - ح<sup>٢</sup> - ١ وهذا يستخرج  
الأساس المجهول ر فيكون

$$r = \sqrt[2]{\frac{l}{h}}$$

أعني أن الأساس يساوي جذر خارج قسمة الكيتين المعلومتين على بعضهما

بدرجة تساوي ١ + م

فاذا اريد مثلاً ادخال أربعة حدود بين العددين ٤٨٦ و ٤ يوضح

في مقدار ر بدل م بدل ٤ مقاديرها وهي ٤٨٦ و ٤

فيؤول الى ر =  $\sqrt[4]{\frac{486}{4}} = \sqrt[4]{121.5} = ٣$  وتركب المتواليه هكذا

$$\text{نبت } ٤ : ٤ \times ٣ : ٤ \times ٣^2 : ٤ \times ٣^3 : ٤ \times ٣^4$$

$$\text{نبت } ٤ : ١٢ : ٣٦ : ١٠٨ : ٣٢٤$$

حاصل ضرب كل حد من مقامات الوضع من طرفي متواليه هندسية واحد

بمقتضى هذا تعريفنا تكون متوالية تصاعدية أو تنازلية يجب أن أساسها  
 أي يجب كونه أكبر من الواحد أو أصغر منه فحينئذ تكون المتوالية

$$\vdots 3 : 6 : 12 : 18 : 24 : 30 : \dots \text{ تصاعدية}$$

ولمتوالية

$$\vdots 64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2 : 1 : \dots \text{ تنازلية}$$

ويلتلف بها كاللتلف بالمتوالية العددية وكل متوالية هندسية توضع هكذا

$$\vdots 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : \dots$$

فإذا رمزنا بالحرف  $r$  لاساسها وبالْحرف  $n$  لحدها الأخير المبوق بمحدود عدد

$p-1$  نحصل

$$r = 1, r = 2, r = 4, r = 8, r = 16, \dots, r = 2^{p-1}$$

وحيث أن القانون  $r = 2^{p-1}$  ..... (1) مشتق على الكميات الأربع

$r, p, n$  يمكن تعيين أحدها بمعرفة الشاغل الأخرى فإذا يكون

الحد الأخير من متوالية هندسية مساوياً لحاصل ضرب الحد الأول في

الأساس مرفوعاً لدرجة مساوية لعدد الحدود السابقة له

فإذا اردنا تعيين الحد الثامن من المتوالية

$$\vdots 56 : 18 : 6 : 2$$

فانه نجعل  $2 = 18 \times 56 = 1008$  وهو الحد الثامن المطلوب

هذا الزر

السر



رأته من متواليه

بـ د : هـ : و : ز : ح : ط : يحدث

بـ = حـ دـ رـ و : حـ = طـ ومنها ينج

و حـ دـ رـ = حـ دـ رـ و : أـ

و حـ دـ رـ = حـ دـ رـ و

و حـ دـ رـ = حـ دـ رـ و

و حـ دـ رـ = حـ دـ رـ و : متواليه : بـ : دـ : هـ : و : ز : ح : ط : يحدث

و حـ دـ رـ = حـ دـ رـ و : حـ = طـ ..... (٤)

و حـ دـ رـ = حـ دـ رـ و : حـ = طـ ..... (٤)

و حـ دـ رـ = حـ دـ رـ و : حـ = طـ ..... (٤)

و حـ دـ رـ = حـ دـ رـ و : حـ = طـ ..... (٤)

و حـ دـ رـ = حـ دـ رـ و : حـ = طـ ..... (٤)

و حـ دـ رـ = حـ دـ رـ و : حـ = طـ ..... (٤)

و حـ دـ رـ = حـ دـ رـ و : حـ = طـ ..... (٤)

و حـ دـ رـ = حـ دـ رـ و : حـ = طـ ..... (٤)

و حـ دـ رـ = حـ دـ رـ و : حـ = طـ ..... (٤)

و حـ دـ رـ = حـ دـ رـ و : حـ = طـ ..... (٤)

يساوي مجموع حدوده المذكورين بقدر الأساس  $r$  يساوي  $n$  يكون  
 $ج - د = ع ر$  أو  $ع (١ - ر)$   $د = ع$  ومما يحد

$ع = \frac{ر^2}{ر-١}$   
وهو مقدار مجموع حدود المتوالية المذكورة لأنه إذا جريت عملية القسمة على المقدار  
أخر حدث  $ج : د : ع : ح : ز : هـ : و : ... الخ$  وهو ناتج غير محال  
للتوالية  $ج : د : ع : ح : ز : هـ : و : ... الخ$  المفروضة إلا في تبديل الحدود  
 $د, ع, هـ, ... الخ$  بمقاديرها المبينة بدالة الحد الأول والأساس

يبدأ وهالك حالة غريبة حادثة من فرض  $د = ا, ر = ع$  في المعادلة

$$\frac{ر^2}{ر-١} = د + ع + ح + ز + هـ + و + ... الخ$$

وهي أنه بعد إجراء الفرض المتقدم يتحصل

$$\frac{١}{ر-١} \text{ أو } ١ = ا + ع + ح + ز + هـ + و + ... الخ$$

وهو ناتج فاسد لأن الطرف الأول من المعادلة المتقدمة سالب والثاني موجب  
وأكثر من الأساس فلتصبح هذا الناتج يلزم لحصول التعادل في

$$\frac{ر^2}{ر-١} = د + ع + ح + ز + هـ + و + ... الخ$$

أن يكمل خارج القسمة فإذا جرى العمل إلى الحد الرابع من خارج القسمة مثلاً حصل

$$\frac{ر^2}{ر-١} = د + ع + ح + ز + هـ + و + \frac{ر^2}{ر-١}$$

وبإجراء الفرض المتقدم في هذه المعادلة يحدث

فإنه إذا زاد العدد  $m$  شيئاً نقصت الكمية

فيكون الحد  $m$  كبيراً بحيث يكون الحد  $m$

أكثر من كل كمية معدومة فعلى ذلك كلما أخذت حدوداً أكبر من الحدود المتعاقبة للتوالي

بالابتداء من الحد الأول قرب مقدار  $\epsilon$  من  $\frac{1}{m}$  فإذا يمكن أخذ حدود كافية

ليكون حد من حدودها مختلفاً عن  $\frac{1}{m}$  بقدره أي زاد عليه فيقال أن نهاية حاصل

جمع حدود  $m$  من المتوالية التنازلية بالابتداء من الحد الأول تكون مساوية للكسر

$\frac{1}{m}$  فإذا زاد عدد حدود المتوالية لانهائياً كان حاصل جمعها مساوياً  $\frac{1}{m}$

أي أن حاصل جمع حدود متوالية تنازلية عدد حدودها لانهائياً يساوي

حارج قسمة عدد الأول على فاصل الواحد والأساس

ويمكن تعيين هذا الحاصل من أول الأمر بفرض المتوالية التنازلية التي عدد حدودها

لانهائياً هكذا

$\frac{1}{m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots$  الخ ومنها يحدث

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots$$

ونجمع هذه المتساويات الأخيرة طرفاً إلى طرف يحصل

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots$$

وحيث أن الطرف الأول من هذه المتساوية الأخيرة يساوي حاصل جمع حدود

المتوالية المذكورة ما عدا الحد الأول أي يساوي  $\frac{1}{m} - \frac{1}{m}$  وأن الطرف الثاني

يساوي



1990

## ٢٠١٦

3. 1950

$\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2}$  فقص

[illegible]

أية نسبة

100

ج- بدل درم مقدارا ارج قیتمن

*[Faint handwritten notes at the bottom of the page]*

دفعه پنجم: امتداد و ترمیم کمره دایر سبب بواسطه القانون المعدل ایجاد

**١-٢** : **تأثيرات غير منتظمة لان الكسر الدائر البسيط**

٥٦٣، ٥٦٤، ٥٦٥ مثلاً يمكن وضعه بهذه الصورة

$$x_1 \dots \dots \dots + \frac{x_1 x_2}{19.} + \frac{x_1 x_3}{29.} + \frac{x_1 x_4}{39.} + \dots$$

م. آ. ش. المذکور جنباً الى متوالية تنازلية غير منتهية مجموع حدودها

بیاری  $\frac{344}{999} = \frac{1}{1000} - 1 \div \frac{344}{1000} = 6$  وهو مقدار اکثر الاعیاد

الكلاني





الثانية مريضه وهب لمريض آخر في مرض موته عبداً له فوهبه الآخر في مرض موته  
 للأول لا يشق لها سواء وحيث أن هبة مرض الموت لا تنفذ إلا في الثلث إن كانت غير واث  
 وله وإجازها باقى الورثة يكون للموهوب له  $\frac{1}{4}$  العبد وللواهب ثلثاه وبهية الموهوب  
 له يرجع للواهب من هذا الثلث ثلثه وبنا عليه فقد زاد ماله وزادت هبته للموهوب  
 له ومنى زادت هبة الموهوب له زاد مال الواهب الأول وبنا عليه يزيد مال الموهوب  
 له وهكذا فإذا يلزم الدور والمطلوب تعين ما يخص كل من المريضين في  
 العبد المذكور

فالجواب أن يفرض ثمن العبد أو نفسه مساوياً للواحد فيكون مقدار ما وهبه الأول  
 منه مساوياً  $\frac{1}{4}$  ومقدار هبة الموهوب له مساوية لثلث الثلث وبنا عليه تكون  
 حصة الواهب الأول  $\frac{2}{4} + \frac{1}{4}$  وحصة الموهوب له  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$  وحيث زاد  
 مال الواهب الأول ثلث الثلث أى  $\frac{1}{4}$  يرجع للواهب الثانى ثلث  $\frac{1}{4}$  أى  $\frac{1}{12}$   
 فإذا تكون

$$\text{حصة الواهب الأول } \frac{2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\text{وحصة الواهب الثانى } \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

وحيث زاد مال الواهب الثانى بمقدار ثلث التسع أى  $\frac{1}{9}$  يرجع للواهب الأول منها

ثلثها وهو  $\frac{1}{27}$  فإذا تكون

[illegible]

المتباينة لا تدبر متى حصل لها فيها بركة واحدة أو طرح منها قيمة واحدة في باب  
فرصت المتباينة ع- د وصايت ع ط ا م و ه ح ز هـ والى الاتي  
لأن الفرق ع- د لما كان موجبا كان الفرق (هـ ح) س- ر  
موجبا أيضا

وينتج من هذه القاعدة انه اذا اريد تحويل احد من احد طرفي مثلثية الى  
الآخر غيّرت علامته

ومنى غيرت علامات حدود طرفى متباينة قلبت شارتها ، من ذلك بخروج  
ما كان فى الطرف الأول الى الثانى وما كان فى الثانى الى الأول

... من غير أن يترتب عليه اشتراط ما يشترطه المشرع في المقتضى والمقتضى من مقتضى

المقتضى من مقتضى

(جوابات لبعض الشافعي في ربح)

ربعة برميل من البند يحتوي على مائة اقة صار يؤخذ منه كل يوم اقة واحدة  
ويضاف اليه اقة ماء بدلها والمطلوب مائة عدد مرات تكرار هذا الفعل  
حتى لا يبقى من البند الا الربع

(جواب أنه لا بد من تكرار الفعل ١٨٣ مرة)

### في المتباينات

لما كانت شروط مناقشة مسألة مؤسسة في الغالب على المتباينات لزم  
بيان قواعدها وتاثيرها أن ينطبق عليها المزايا اختصارها قواعد التحويلات  
لتجربتها على المعادلات

هذا وان كانت القواعد التي تبني عليها هذه التحويلات بديهية لا تحتاج  
لتوضيح الا انه اقتضى الحال توضيحها هنا تجنباً للوقوع في التحويلات  
غير الصحيحة عند ما يكون طرف المتباينة سالبين

ومن البديهي أنه متى كانت كينا  $a > b$  موجبتين وكان  $c < d$

كان الفاصل  $a - b$  موجباً وميضاً هكذا  $a - d < b - d$ .

ومنى كانت كية  $a < b$  موجبة و  $d$  سالبة كان  $c < d$  لان الكية للوجبة

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{3} < \frac{1}{4}$$

وحدث ان مقام بضمير ب يطرأ في العدد ١٠ الى

$$٨٥٠ < ٩٠٠ < ٩٥٠$$

ويتحول الحد والمشتقة الى المجهول س الى طريق الحدود المعلومة الى  
الأخر يتحصل

$$٨٥٠ < ٩٠٠ < ٩٥٠ \text{ أو } ٨٥٠ < ٩٠٠ < ٩٥٠$$

وبقسة كل من طرفيها على = يحدث

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$$

وباجراء على مشابه للتقدم في استبانة  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$  س (٨-٤) س يتحصل  
س  $\frac{1}{4}$

وكذا اذا جرى العمل المتقدم على المتباينة  $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$  س (١٠-٨) س  
يُحصل س (١١-٨)

فاذا فرض للمجهول الناتج من كل من استبانات الثلاث مقادير فالمجهول  
الناتج من الاولى لا يفرض له الا المقادير التي تزيد عن المقدار  $\frac{1}{4}$  أو  $\frac{1}{5}$ ،  
وهو النهاية الصغرى له

واما مجهول المتباينة الثانية فلا يفرض له الا المقادير التي دون المقدار  
 $\frac{1}{4}$  أي  $\frac{1}{4}$  وهو النهاية الكبرى له

(١٨٤)  
ولا تغير المتباينة متى ضرب كل من طرفيها في كمية واحدة موجبة أو قسم  
كل منها عليها

فإذا فرضنا الكمية الموجبة المعلومة  $m$  آلت المتباينة  $h < d$  الى  
 $(d-m) < (d-m) \cdot \frac{d}{m}$  لأنه لما كان الفرق  $d-m$  موجبا كانت  
 حاصل ضرب  $d$  في  $m$  أو خارج قسمته عليه موجبا أيضا أعني أن كلا من  
 $m-d$  و  $d-m$  و  $\frac{d}{m} - \frac{d}{m}$  يكون موجبا

ويمكن البرهنة أيضا على هذه القاعدة بأن يقال أن حاصل ضرب الكيتين  
 $h$  و  $d$  في الكمية الموجبة  $m$  أو خارج قسمتهما عليها لا يختلف في  
 العلامة عن الكيتين المفروضتين وتكون النسبة بين أصلي حاصل  
 الضرب أو خارج القسمة كالنسبة بين الكيتين  $h$  و  $d$  المذكورتين  
 وهي ضرب طرفي متباينة في كمية سالبة أو قسما عليها قلبت أثارتهما  
 لأن هذا يؤهل الى ضرب المتباينة في كمية مطلقة وتغيير علامات  
 جميع حدودها

نريد متى كان المجهول الداخل في متباينة بدرجة أولى أمكن تحويلها الى صورة  
 بحيث يكون فيه المجهول داخلا في أحد الطرفين بمكر مساو للواحد كما تقدم في حل

المعادلة ذات الدرجة الاولى

فإذا فرضنا المتباينة

منها فتح أن  $\frac{47}{19}$

فيكون  $\frac{47}{19}$  يفرض للجهول من غير المقادير الزائدة من  $\frac{47}{19}$  أغنى  
 "ولا يترك من مقادير بين انطباقه شئ من مقادير من إلا  
 لتأثيره في صورة بين النهايتين المتقدمتين

منه إذاً من المتباينات  $د < د', د' < د''$  أن

$د' < د'' + د' < د' + د' + د' + \dots$

فإنه يوفق  $د - د', د' - د'', د'' - د'''$  ولما كانت كلها موجبة كان حاصل  
 مجموعها هو  $د - د' + د' - د'' + د'' - د''' + \dots$  أي

$(د + د' + د'' + \dots) - (د' + د'' + د''' + \dots)$  موجب

وإن كانت الكميات  $د, د', د'', \dots$  د, د', د'', د''', د''''

كلها موجبة حدثت من المتباينات  $د < د', د' < د'', د'' < د''', \dots$

هذه المتباينة  $د < د' < د'' < \dots$

نلاحظ أن كل من خارج قسمة  $\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}$  أكبر من الواحد

كان أصله بها في بعضها وهو  $\frac{7}{3} < \frac{7}{3} < \frac{7}{3}$  أكبر من الواحد أيضاً

فإن كانت الكميات  $د, د', د'', \dots$  د, د', د'', د''', د''''

استحال تحقيق ما تقدم لأنه إذا فرضت المتباينات  $د < د', د' < د'', \dots$

كان حاصل ضرب طرفيها الأولين  $د < د'$  وحاصل ضرب طرفيها الآخرين

(١٨٥)  
وما بعد ذلك - فهو نهاية سلكي للجهول المتباينة الثالثة وينج من  
المقادير المجهول في تكون كيات رقيقة - اية تزيد عن  
فاد كان مجهول في محققا المتباينتين الاوليين معا كانت متساوية بين  
بين  $\frac{4}{3}$  و  $\frac{1}{4}$  ٩ واذا كان محققا للمتباينة الثانية والثالثة معا  
كان محققا لشرط س (١١-) وبالحجة فلا يوجد مقدار للجهول في  
يكون محققا للمتباينة الاولى والثالثة معا

١١- وسنعتبر الآن حالة دخول مجهول في رص بدرجته اولى في المتباينتين  
١٦ ص - ٤ ص ٥ و ٥ ص + ٣ ص ١٦

فينج منها

$$س < \frac{٥ + ٤}{٣} ص , س < \frac{١٦ - ٣}{٥} ص$$

فاذا فرض للجهول ص أي مقدار اختياريا ممكن أن يفرض للجهول في  
جميع المقادير التي تزيد عن اكبر الكيتين

$$\frac{٥ + ٤}{٣} ص و \frac{١٦ - ٣}{٥} ص$$

ويستنتج أيضا من المتباينتين المذكورتين أن

$$ص < \frac{٥ - ٣}{٢} ص , ص < \frac{١٦ - ٥}{٣} ص$$

ويلزم لتحقيق ذلك أن يكون

$$\frac{٥ - ٣}{٢} < \frac{١٦ - ٥}{٣}$$

وهو





... من غير أن يكون خامس <sup>(١٩٨)</sup> وأول أكبر من الثاني وحيث أن هذا من المستحيل  
 في بروجيجه من سبق عاملاً

وإذا كانت  $\langle \text{ك} \rangle$  حرة موجبتين فإنه ينتج من استبانة  $\langle \text{ح} \rangle$  و  $\langle \text{ك} \rangle$  المتبانية  
 $\langle \text{ك} \rangle$  و  $\langle \text{ز} \rangle$  وإذا كانت كلتا اليكيتين  $\langle \text{ح} \rangle$  و  $\langle \text{ز} \rangle$  سالبة لتحال جواز ما تقدم  
 لأنه إذا فرضت المتبانية  $\langle \text{ح} \rangle - \langle \text{ز} \rangle$  تحصل بنا على ما ذكر  $\langle \text{ح} \rangle - \langle \text{ز} \rangle$   
 أعني  $\langle \text{ح} \rangle - \langle \text{ز} \rangle$  وهذا محال

وعلى نظرية

نجد إذا فرضت الكور  $\frac{\text{ح}}{\text{ز}}$  و  $\frac{\text{ح}}{\text{ز}}$  و  $\frac{\text{ح}}{\text{ز}}$  ذوات بسوط حيثما اتفق ومقاماً  
 موجبة كان الكسر  $\frac{\text{ح} + \text{ز} + \text{ح} + \text{ز} + \text{ح} + \text{ز}}{\text{ز} + \text{ز} + \text{ز} + \text{ز} + \text{ز} + \text{ز}}$  وسطاً متناسباً بينها أعني أن

مقداره يكون محصوراً بين أكبرها وأصغرها  
 لأنه إذا جعل  $\langle \text{ك} \rangle$  رمز لقيمة أكبر من أكبر هذه الكور و  $\langle \text{ك} \rangle$  لقيمة  
 أصغر من أصغرها حدث

$\frac{\text{ح}}{\text{ز}} < \langle \text{ك} \rangle$  و  $\frac{\text{ح}}{\text{ز}} < \langle \text{ك} \rangle$  و  $\frac{\text{ح}}{\text{ز}} < \langle \text{ك} \rangle$  و ..... و  $\frac{\text{ح}}{\text{ز}} < \langle \text{ك} \rangle$   
 $\frac{\text{ح}}{\text{ز}} < \langle \text{ك} \rangle$  و  $\frac{\text{ح}}{\text{ز}} < \langle \text{ك} \rangle$  و  $\frac{\text{ح}}{\text{ز}} < \langle \text{ك} \rangle$  و ..... و  $\frac{\text{ح}}{\text{ز}} < \langle \text{ك} \rangle$

وينتج من ذلك

$\langle \text{ح} \rangle < \langle \text{ك} \rangle$  و  $\langle \text{ح} \rangle < \langle \text{ك} \rangle$  و  $\langle \text{ح} \rangle < \langle \text{ك} \rangle$  و ..... و  $\langle \text{ح} \rangle < \langle \text{ك} \rangle$

$\langle \text{ح} \rangle < \langle \text{ك} \rangle$  و  $\langle \text{ح} \rangle < \langle \text{ك} \rangle$  و  $\langle \text{ح} \rangle < \langle \text{ك} \rangle$  و ..... و  $\langle \text{ح} \rangle < \langle \text{ك} \rangle$

وحيث يكون

مستحيل



نائب

كل هذه المسئلة يقال اذ من للعدد المجهول بالرمز س تحصل

$$٤٠ - س < ٥ \quad ٥ - س > ٧ - س < ١٣ + س \quad \text{ومنهما يحدث} \\ س < ١٥ \quad \text{و} \quad س < ٢٠$$

أعني أن مقدار المجهول س يكون محصوراً بين العددين ١٥ و ٢٠ ويكون عدد المحلول محدوداً

الثالثة ما العدد الذي اذا نقص من ضعفه ه كان الباقي أصغر من ٥

واذا نقص من ثلاثة أمثاله ٧ كان الباقي أكبر من ضعفه ذاتاً ١٣

كل هذه المسئلة يقال اذ من بالرمز س للعدد المجهول تحصل

$$٤٠ - س > ٥ \quad \text{و}$$

$$٢٠ - س < ٧ - س < ١٣ + س \quad \text{ومنهما يحدث}$$

$$س < ١٥ \quad \text{و} \quad س < ٢٠$$

وحيث أن هذا غير ممكن فالمسئلة مستحيلة

الرابعة سئل احد الرعاة عن عدد ما يرعاه من الغنم فأجاب أنها اذا

نقص من ضعف غنمه ه كان الباقي أكبر من ٤٠ واذا نقص من ثلاثة

أمثاله ٧ كان الباقي أصغر من ضعفه ذاتاً ١٣ والمطلوب معرفة

عدد ما يرعاه من الغنم

ملی قلمی، و

فيكون الفرق  $ص - ح$  كثر اقل من الواحد ويرمى له بالكسر  $ص$   
 يفرض  $ص$  عددًا صحيحًا أكبر من واحد ثم يبحث عن عدد صحيح  $ح$   
 الذي يقرب من مقدار  $ص$  فيكون الفرق  $ص - ح$  أقرب من واحد ويرمى  
 له بالكسر  $\frac{1}{ح}$  يفرض  $ح$  عددًا صحيحًا أكبر من واحد وعلى هذا  
 المنوال يحصل

$$\frac{1}{p} + w = r, \frac{1}{r} + q = s, \frac{1}{s} + t = u, \frac{1}{u} + v = p$$

وَمِنْهَا بَيْتٌ

$$\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1+s} = 0$$

فان كانت احدى هذه الكيات  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  مبنية بعد صحيح



$$\frac{1}{1+4} + 1 = \frac{104}{887}$$

وحيث أن الجذر من القاسم المشترك لا عظم بين عددين، فيصير  
 بل إلى خارج قسمة مابين بعدد صحيح فيكون تحويل كمية منتهية، فيذكر  
 ذلك كل كسر منسلس منته يمكن تحويله إلى كمية منسلسلة لانه يقتصر على  
 متى كان كسر منسلس محدوداً أمكن تحويله دائماً إلى كسر آخر عتباراً من  
 القيمة ويؤخذ من ذلك أنه متى أريد تحويل كمية غير جذرية فيكون  
 كان هذا الكسر غير منته

١١ بيان تحويل كمية غير جذرية إلى كسر منسلس كالكمية

$$\frac{27+3}{4}$$

يقال حيث أن الجذر التربيعي للرقم ٧ محصور بين العددين ٢، ٤  
 فالكمية المفروضة تكون محصورة بين  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{4}{3}$  ويكون العدد الصحيح المقصود  
 هي عليه هو ٢ وجنيد يوضع

$$\frac{27+3}{4} = 2 + \frac{1}{4}$$

وحيث أن الجذر التربيعي للرقم ٧ محصور بين ٢، ٣ فيكون منته

فان كان الكسر غير منتهية  
 يراد تحويلها الى كسر متسلسلة بالاعتقاد  
 ان من عدد من صحيح فيكون العدد الصحيح الذي يقرب  
 اليه هو البواجب نسبة د على د فاذا مضى هذا الخارج بالوزن  
 نسبة د الى د فنحصل

$$\frac{1}{d} + \frac{d}{d} = \frac{d+1}{d}$$

ان الخارج نسبة د على د بالوزن د ولباق بالوزن و تحصل

$$\frac{1}{d} + \frac{d}{d} = \frac{d+1}{d}$$

يدل ذلك انه يلزم لتحويل كسر اعتيادي الى متسلسلة ان نحرك على حديه  
 نسبة اهلية ايجاد القاسم المشترك الاعظم بين عددين مفروضين وذلك  
 ان يمداء باجزاء قسمة البسط على المقام

و ان يخرج القسمة المتوالية الناتجة من ذلك بالوزن د، د، د، و...  
 كما ان نسبة الكسر المتسلسلة الذي اليه الكسر الاعتيادي هكذا

$$\frac{1}{d} + \frac{d}{d} = \frac{d+1}{d}$$

حينئذ يحصل بهذه المانة

$$= \frac{1103}{889}$$



$$\frac{1}{1+s} + s$$

فيحصل بمقتضى قواعد الكور

$$\frac{s + s(1+s)}{1+s} = \frac{1}{1+s} + s, \quad \frac{1+s}{s} = \frac{1}{s} + s, \quad \frac{s}{1} = s$$

$$\frac{1+s+s(s+s)}{s+s(1+s)} = \frac{\frac{1}{s} + s}{\frac{1}{s} + s}$$

$$\frac{1+s+s(s+s)}{s+s(1+s)}, \quad \frac{s+s(1+s)}{1+s}, \quad \frac{1+s}{s}, \quad \frac{s}{1}$$

فاما الكور  $\frac{s}{1}$  و  $\frac{1+s}{s}$  و  $\frac{s+s(1+s)}{1+s}$  و  $\frac{1+s+s(s+s)}{s+s(1+s)}$

فهى المعروفة بالكور المقربة أو الآئلة

وأما الكور  $\frac{s}{1}$  و  $\frac{1}{s}$  و  $\frac{1}{s}$  فتسمى بالكور المكملة

وأما يجات  $s$  و  $s$  فتسمى في بعض الأحيان بلعنوارج غير سامية

بيان سبب هذه التسمية

وبالنسبة إلى الآئلة المتقدمة يشاهد أن بسط الآئلة الثلاثة يك من

حاصل ضرب بسط الآئلة التي قبلها في مقام الكور المكملة الأخير من بسط

الآئلة التي قبلها بمرتبتين ومقام الآئلة المذكورة مركب من حاصل ضرب

مقام الآئلة التي قبلها في مقام الكور المكملة الأخير فإذا مقام الآئلة التي

قبلها بمرتبتين ويتركب كل من بسط ومقام الآئلة من أربعة ما كفية انتهى





(١٩٧)

تتركب بها الآئمة الثالثة وبهذه المثابة تتركب كل آئمة  
 وليبان تعميم هذه القاعدة ببرهن على أنها إذا كانت موافقة لثلاث آئلات  
 متوالية من أهمربة كانت فانها تكون موافقة للآئمة الرابعة التالية لها  
 ولذا نرمز للآئلات الأربع المتوالية بالرموز

$$\frac{8}{ج}, \frac{ك}{د}, \frac{ل}{ه}, \frac{ز}{و}$$

ثم نرمز بالرمز  $ر$  لمقام الكسر الممثل الأخير للآئمة  $\frac{ل}{ه}$  وبالرمز  $ل$   
 لمقام الكسر الممثل الأخير للآئمة  $\frac{ك}{د}$  ثم نفرض أن

$$ر = ك + ر, \quad ل = ل + ر$$

فيحصل مقدار الآئمة  $\frac{ل}{ه}$  من  $\frac{ل}{ه}$  بأن يوضع فيها بدل  $ر$  القيمة  
 $ل + ر$  فيجد مشـ

$$\frac{ل}{ه} = \frac{ل(ل + ر + 8) + ك}{ل(ل + ر + 8) + ك} = \frac{ل(ل + ر + 8) + ك}{ل(ل + ر + 8) + ك} = \frac{ل}{ه}$$

وبيند يشاهد أن الآئمة  $\frac{ل}{ه}$  لا تختلف في التركيب عن الآيلات التي قبلها  
 وبمثل هذا ببرهن على أن تركيب كل آئمة يكون حاصلًا بمقتضى هذه القاعدة  
 وبناء عليه فهي مطردة

فاذا اريد حساب آئلات الكسر المتتلسل

$$س - \frac{ع}{ج} = \frac{ك}{ح} \quad (ك - ع) \div (ج + ح) = \frac{ك}{ح} \quad \text{و نفس} \quad \frac{ع}{ج} = \frac{ك}{ح} \quad (ك - ع) \div (ج + ح)$$

وبالتأمل في هاتين المتساويتين يشاهد أن عرقين س -  $\frac{ع}{ج}$  ، س -  $\frac{ك}{ح}$

متطافان في العدمه فان كان س أكبر من  $\frac{ع}{ج}$  كان أصغر من  $\frac{ك}{ح}$  وان

كان س أصغر من  $\frac{ع}{ج}$  كان أكبر من  $\frac{ك}{ح}$  وحيث أن الآئله الأولى  $\frac{ع}{ج}$

أصغر من س فتكون كل من الآئلات ذات المرتبة الفردية أصغر من

مقدار الكسر المتسلسل وكل من الآئلات ذات المرتبة الزوجية أكبر منه

بند ١١٩ المقدار المطلق للفرق س -  $\frac{ك}{ح}$  أقل من المقدار المطلق للفرق س -  $\frac{ع}{ج}$

لان ص أكبر من الواحد و ك أكبر من ع وحيث تكون كل آئله اقرب

الى مقدار الكسر المتسلسل من الآئله التي قبلها ولذا سميت الآئلات بالانكسور

منقورة وينتج من ذلك أن الآئلات ذات المرتبة الفردية يتكون منها متسلسلة

تصاعديه وذات المرتبة الزوجية متنازليه

يند الفرق بين آئلتين متواليين يساوى كسراً اعتيادياً بسطه الواحد ومقامه

حاصل ضرب مقام هاتين الآئلتين لانه اذا فرضت الآئلتان ج ،  $\frac{1+ج}{د}$

كان الفرق بينهما مساوياً  $\frac{1}{د}$  أعني  $\frac{1+ج}{د} - \frac{ج}{د} = \frac{1}{د}$  ونفس هذا يبرهن

على باقي الفروق

ويمكن تسميم البرهنة على ذلك أيضاً بأن يقال ذاكات هذه القاعدة موفقة

لآئلتين متواليين من أي مرتبة كالآئلتين  $\frac{ع}{ج}$  ،  $\frac{ك}{ح}$  كانت كذلك

بدلالة الأولى

١١٨ منه مقدار الكسر المتسلسل يكون محصوراً دائماً بين آلتين متواليتين ولذا نفرض

الكسر المتسلسل الحرفي

$$h + \frac{1}{1+h} + \frac{1}{1+h} + \dots$$

ثم نرمز لفقدان التحقيق بالرمز  $s$  فيشاهد أن الآلة الأولى  $\frac{1}{1+h}$  تكون أصغر من المقدار  $s$  حيث حذف الجزء الموجب  $\frac{1}{1+h}$  من مقدار  $s$  وبشاهد أيضاً أن الآلة الثانية  $h + \frac{1}{1+h}$  تكون أكبر من  $s$  حيث أنه قطع النظر فيها عن جزء من المقام  $h + \frac{1}{1+h}$  ومثل هذا يبرهن على باقي الآلات الآتية

ويمكن البرهنة بوجه عام منطوق هذه الخاصية بأن يقال

لاستخراج مقدار  $s$  من مقدار  $\frac{1}{1+h}$  المساوي  $\frac{1}{1+h} + \frac{1}{1+h} + \dots$  يغير فيه الرمز  $h$  بالمقدار  $h' + \frac{1}{1+h}$  الذي هو موجب دائماً وأكبر من الواحد فيحصل بعد جعل  $s$  رمزاً للملكية  $h' + \frac{1}{1+h}$

$$s = \frac{1}{1+h} + \frac{1}{1+h} + \dots \quad (1)$$

وإذا طرحت الآلتان  $\frac{1}{1+h}$  و  $\frac{1}{1+h}$  أحدهما بعد الأخرى من كل من طرفي

معادلة (١) حدث

وَيَكُونُ الْخَطَأُ الْحَاصِلُ أَقْلَ مِنْ هَذَا الْكُسْرِ وَحَيْثُ أَنَّ

لِـ  $\frac{1}{(2+8)}$  >  $\frac{1}{2}$  فَلَا مَانِعَ مِنْ جَعْلِ الْكُسْرِ  $\frac{1}{2}$  نِهَائِيَةً لِلْخَطَأِ وَهَذِهِ

النِّهَايَةُ تَوْثُرُ عَلَى غَيْرِهَا لَكُنْهَا بَسِيطَةً

بَيِّنَةٌ يَكْفِيُ لِجَعْلِ الْآثَلَةِ  $\frac{1}{2}$  مُخْتَلِفَةً عَنْ مَقْدَارِ كُسْرِ مُتَسَلِّسٍ بِكِبَرِ دُونَ

الْكُسْرِ الْمَعْلُومِ  $\frac{1}{2}$  أَنْ يَكُونَ  $\frac{1}{2}$  >  $\frac{1}{2}$  فَيُحْدِثُ

لِـ  $\frac{1}{2}$  <  $\frac{1}{2}$  أَوْ فِي النِّهَايَةِ لِـ  $\frac{1}{2}$  =  $\frac{1}{2}$

وَيَنْتِجُ مِنْ ذَلِكَ أَنَّهُ يَكُنْ دَائِمًا إِيجَادُ الْمَقْدَارِ الْحَقِيقِيِّ أَوْ الْمَقْدَارِ الْبَيِّنَةِ بِكُسْرِ

مُتَسَلِّسٍ لِأَنَّهُ إِنْ كَانَ الْكُسْرُ الْمُتَسَلِّسُ مُنْتَهِيًا امْكُنَ بَيَانُ مَقْدَارِهِ بِكُسْرِ اعْتِيَادٍ

وَإِنْ كَانَ غَيْرَ مُنْتَهٍ امْكُنَ الْوَصُولُ إِلَى مَقْدَارٍ مُقَرَّبٍ بِجَعْلِ مَقَامِ الْآثَلَةِ كُسْرًا

بِقَدَرِ مَا يُرَادُ لَكُونَ مَقَامَاتِ الْآثَلَاتِ صَحِيحَةً لِأَنْزَالِ أَخْذَةٍ فِي الْإِزْدِيَادِ

بَيِّنَةٌ كُلُّ كُسْرِ مُتَسَلِّسٍ دَائِرٌ يُدِيلُ عَلَى أَحَدٍ جُذْرِي مُعَادِلَةٍ ذَاتِ دَرَجَةٍ ثَانِيَةٍ

مُكَرَّرَاتٍ حُدُودَهَا مَنْطِقَةٌ

وَاللَّهِ هِنَةٌ عَلَى ذَلِكَ بَوَاحٍ عَامٍ نَفَرُضُ كُسْرًا مُتَسَلِّسًا مَرَّةً مِنْ جُزْءٍ غَيْرِ

دَائِرٍ كُورِهِ الْمَكْلَةُ  $\frac{1}{2}$  وَ  $\frac{1}{3}$  وَ ..... وَ  $\frac{1}{25}$  وَ  $\frac{1}{27}$  وَ مِنْ جُزْءٍ دَائِرٍ كُورِهِ

الْمَكْلَةُ  $\frac{1}{2}$  وَ  $\frac{1}{3}$  وَ ..... وَ  $\frac{1}{27}$  وَ  $\frac{1}{25}$  ثُمَّ يُجْعَلُ مِنْ رَمْزِ الْجُزْءِ الدَّائِرِ

فَيَكُونُ

موافقة للأثلتين المتواليتين  $\frac{ك}{د}$  و  $\frac{ج}{ز}$  وحيث تقدم أن

$$\frac{ج}{ز} = \frac{ك + ز}{د + ز} \text{ فيكون}$$

$$\frac{ج}{ز} - \frac{ك}{د} = \frac{ك + ز}{د + ز} - \frac{ك}{د} = \frac{د(ك + ز) - ك(د + ز)}{د(د + ز)} = \frac{دز - كد}{د(د + ز)}$$

ويؤخذ من الفرض  $\frac{ك}{د} - \frac{ج}{ز} = \pm \frac{١}{دز}$  أي  $دز - كد = \pm ١$  وبناءً

$$\text{عليه يكون } \frac{ج}{ز} - \frac{ك}{د} = \pm \frac{١}{دز} \text{ أي } \frac{ك}{د} - \frac{ج}{ز} = \pm \frac{١}{دز}$$

الآن ثلاث المركبة بمقتضى (بند ١١٧) هي كور لا تقبل الاختصار لانه لو كان

لحدى الآلة  $\frac{ج}{ز}$  مضروب مشترك لكان يقسم كلا من طرفي المتساوية

$دز - كد = \pm ١$  ويكون بمقتضى ذلك قاسماً للواحد وهذا خلاف

بني وحيث تقدم أن مقدار الكسر المتسلسل محصور بين أي آلتين متواليتين

كالآلتين  $\frac{ك}{د}$  و  $\frac{ج}{ز}$  مثلاً فيكون الفرق بين هذا المقدار والآلة  $\frac{ك}{د}$

دون الفرق بين الآلتين  $\frac{ك}{د}$  و  $\frac{ج}{ز}$  وقد شوهد أن الفرق الأخير يساوي

المقدار  $\frac{١}{دز}$  فيكون الخطأ الحاصل في أخذ آلة بدل المقدار التقريبي

للكسر المتسلسل دون المقدار  $\frac{١}{دز}$  أي دون الواحد مقسوماً على حاصل

ضرب مقام هذه الآلة في مقام التالية لها

ويمكن إيجاد نهاية الخطأ بغير دالة مقام الآلة التالية للفروضة لانه

يغصن بمقتضى ما تقدم  $دز - كد = \pm ١$  وحيث أن خارج القسمة  $ز$

غير التام لا يكون دون الواحد أبداً فلا يزيد الكسر  $\frac{ك}{د}$  في النهاية عن



بالاضبط فيسبغ فيضعف الرقم.  $\frac{1}{2}$  منه ووجدت فيسبغ فيسبغ فيسبغ  
 المقدار الحقيقي للكمية غير المحددة. مفروضة فيسبغ فيسبغ فيسبغ  
 النهايتين معا ولا يؤخذ في الكسر المتسلسل غير الخوارزمية في النهايتين  
 مثلاً اذا اريد بيان النسبة على كسر متسلسل. بمقدار يحقق هذه النسبة  
 محصوراً بين مقدارين اعشاريين محصورين على خمسة ارقام اعشارية  
 كالمقدارين  $3.14159$  و  $3.14160$  ثم يحول هذان المقداران  
 الى كسرين متسلسلين فتكون الخوارزمية غير التامة للكسر الاول  $3.14159$   
 والثاني  $3.14160$  وينتج من ذلك أن الخارجين الاولين غير التامين  
 لمقدار  $\pi$  المحلول في كسر متسلسل  $3.14159$  غير انه ان حصل شك في ذلك  
 الخارج الثالث غير التام هو  $15$  أو  $16$  أخذ مقداراً طرأاً  
 اعشارية تزيد في العدد عن المقدارين الاولين ليحدد الكسر المتسلسل  
 عن الكسر المكمل الثاني.

في غير المعين للمعادلات ذات الدرجة الاولى

في تحويل الصحاح لمعادلات بدو في كسر

$$x + y = z$$

بند الغرض الاصل من الحل غير المعين للمعادلات ذات الدرجة الاولى هو البحث



فهي غير متخفة وينتج من ذلك أنه إذا كان مكرراً <sup>(٤٠٦)</sup> ، فغيرا وليس معاً  
لا يكون للمعاد له حل صحيح

١٤٨ ومتى كان مكرراً  $\text{ح ر د}$  أوليين مقاما كان للعادلة  $\text{ح س} + \text{د ص} = \text{هـ}$   
 حلول صحيحة لانه اذا فرضنا الكميات  $\text{ح ر د هـ}$  موجبة وحلت المعادلة  
 المذكورة بالنسبة للجهول  $\text{س}$  نحصل

س = ۱۰۰ - ۱۰۰

فإذا رمى الرمح  $8$  بعد ما بحيث يكون  $8 = 8 - 8$  هو  
( هو كناية عن عدد موجب ) واستغرض هو بمقداره في مقدار  
في حديث

$$\frac{f' + f''}{2} - g = 0$$

وإذا فرض أن المجهول  $x$  اخذ بالتوالي كل من المقادير  
 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  كانت البواقي الحادثة من قسمة  $2x + 3$  على  $5$   
غير متساوية وكل واحد منها أصغر من  $5$  لأنه لو جعل المجهول  $x$  مقدراً  
مختلفاً كان منها أصغر من  $5$  كالمقادير  $2, 3, 4$  وبهما توصل  
إلى باقيين متساويين فكان

$\dot{h} + \dot{r} = \dot{r} + \dot{h}$  ,  $\dot{h} + \dot{r} = \dot{r} + \dot{h}$  ومنها بحث

$$(4-1)s = (2-1)s$$

عن حلول المسائل ذات الدرجة الاولى التي منطوقها غير كاف حتى يكون مصدر  
المعادلات من عدد المجاهيل عند ما يفرض لهذه المجاهيل اعداد صحيحة  
موجبة أو سالبة أو موجبة فقط والمراد بالحلول الصحيحة الحلول التي تكون  
بها مقادير المجاهيل اعداد صحيحة

١٤٧ سند ولذا نفرض المعادلة العمومية  $س + دس = هـ$  ذات الدرجة الاولى  
والجهولين التي فيها  $هـ, د, س$  رموزاً لاعداد صحيحة موجبة أو سالبة  
فيمكن دائماً ان لا يكون لهذه الاعداد مضروب مشترك لانه ان كان  
لها مضروب مشترك امكن حذفه وحولت المعادلة المفروضة الى معادلة  
اخرى متحدة معها الصورة الا انها اخصر منها فاذا تقر هذا شئوه من  
اوله لانه اذا كان مكرراً  $هـ, د$  غير أوليين معاً لا يكون للمعادلة المفروضة  
حل صحيح لانه ان كان لها مضروب مشترك كالمضروب  $م$  تحصل  
 $هـ = ح م, د = م ز$  (بفرض  $ز, د$  عددين صحيحين) فاذا وضع  
بدل  $هـ, د$  مقدارهما في المعادلة المتقدمة وقسم كل من طرفيها على  
المضروب  $م$  تحصل

$$ح س + ز د = ح$$

فاذا فرض للجهولين  $س, د$  مقادير صحيحة كما هو المطلوب كان الطرف  
الاول من هذه المعادلة صحيحاً وحيف أن طرفها  $ح$  الثاني كمية كسرية  
فهـ



$$(٢-٣) = ١ - ١$$

وحيث أن الطرف الثاني عدد صحيح فيكون الطرف الأول كذلك وبناء على ذلك  
يكون  $(٢-٣)$  قابلاً للقسمة على  $١$  وهذا محال لأن  $١$  أولي مع  $١$   
وكل من  $٢$  و  $٣$  أصغر من  $١$  ومن هنا يعلم أن أحد البواقي الحادثة من قسمة  $١$  و  $٣$   
على  $١$  يكون صفراً وعليه فيكون للجول  $١$  مقدار صحيح أقل من  $١$  بواسطة  
يكون للجول  $١$  مقدار صحيح فإذا كانت المعادلة بهذه الصورة

$$١ - ٣ = ١ \quad \text{فانه يستخرج منها}$$

$$١ = ٣ + ١$$

ثم يبرهن على العكس  $٣ + ١ = ١$  بثل ما برهن على العكس المتقدم  $١ + ٣ = ١$   
لكنه لا يحفظ انه يمكن استخراج حلول المعادلة  $١ - ٣ = ١$  من حلول  
المعادلة  $١ + ٣ = ١$  وذلك بتغيير علامة الجول  $١$   
ومن هنا يؤخذ أنه متى كان للمعادلة الأخيرة حلول صحيحة كان للآخرى  
كذلك

١٤٩ ويمكن البرهنة على العقيدة المتقدمة في البند السابق بواسطة م خواص المكمور  
المستلثة بأن تفرض المعادلة

$$١ + ٣ = ١$$

(٤١)

$$٤٤٣ = ٦٥ \times ٧ + ١٩$$

وحول  $\frac{٦٥}{٤٤}$  الحاصل متسلسل وتكونت الآثلاث المتوالية كان  $\frac{١٩}{٧}$   
مقدار الآلة التي قبل الأخيرة وحيث كانت زوجية المرتبة فيكون

$$١٩ \times ٤٤ - ٦٥ \times ٧ = ١٤ \text{ ومن هنا نجد } -$$

$$٤٤٣ = ٤٤٣ \times ٧ \times ٦٥ - ٤٤٣ \times ١٩ \times ٤٤$$

وجيئني شاهد أن المعادلة المفروضة تتحقق بجعل

$$١٧٠١ = ٤٤٣ \times ٧ - ٤٦١٧ = ٤٤٣ \times ١٩$$

ويعتقضى ما تقدم في (سند) <sup>(١٤٨)</sup> تتعين جميع الحلول الصحيحة للمعادلة المفروضة  
بواسطة القوانين

$$٤٤٣ = ٦٥ + ٤٦١٧ \text{ و } ٤٤٣ = ١٧٠١ - ٤٤$$

$$٤٤٣ = ٦٥ - ٤٦١٧ \text{ و } ٤٤٣ = ١٧٠١ + ٤٤$$

سند وهناك طريقة أخرى غير مؤشكة على القضايا المتقدمة بواسطتها  
يتوصل من أول وهلة الى القانونين الذين منها تعلم جميع الحلول الصحيحة  
لمعادلة ذات درجة اولى ومجهولين

فاذا فرضت المعادلة  $٥س + ٧ص = ١٤$  وجعل فيها  $٥ = ١٤$  وحلت  
بالنسبة للمجهول  $س$  تحصل

$$س = \frac{١٤ - ٧ص}{٥}$$

(c.4)

$$h(s-p) = d(u-v)$$

وتحقق هذه المعادلة بالمقادير الصحيحة للجهتين  $S$  و  $s$  يلزم أن  
 يكون  $s$  قاسماً للحاصل  $h$  ( $s$  -  $h$ ) وحيث كان  $s$  اولياً مع  $h$   
 فيكون قاسماً للكمية ( $s$  -  $h$ ) فاذا فرضنا خارج القسمة بالرمز  $w$  كان  
 $s$  -  $h = w$  و  $w$  (بجعل  $w$  كتابة عن عدد صحيح موجب او سالب) واذا  
 استقوض في المعادلة المتقدمة  $s$  -  $h$  بالمقادير  $w$  حدث  
 $s$  -  $h = w$  وحيث يكون

س = ج + ز      ن = ص - ز - ح و

وأى مقدار موجب أو سالب يفرغ من غير المعين و يؤخذ منه للجبهولين  
س من مقداران صحيحان ومحققان للعادلة المفروضة  
ويشاهد من القانونين المتقدمين أن موضع فيها على التوالى بدل المتغير و  
وأحد المقادير ١٠، ٢، ٣، ..... الخ و ١، ٢، ٣، ..... الخ  
أنه ينتج من مقادير المجهول س متوالية عددة أساسها مكرر ص  
ومن مقادير المجهول ص متوالية رقية أساسها مكرر س  
وبذلك يمكن بواسطة ما تقدم أيضاً إيجاد الحلول الصحيحة لمعادلة ذات درجة  
أولى ومجهولين

مثلاً إذا فرضت المعادلة



س = ك + م + ن - (ك + م + ن) = ٠

س = ك + م + ن - (ك + م + ن) = ٠

س = ك + م + ن - (ك + م + ن) = ٠

س = ك + م + ن - (ك + م + ن) = ٠

ولا استخراج مقدار س بوضع بدل س في المعادلة

س = ك + م + ن - (ك + م + ن) = ٠

س = ك + م + ن - (ك + م + ن) = ٠

س = ك + م + ن - (ك + م + ن) = ٠

وإذا كان الناحية داخل تحت القاعدة لتقدمة (١٩٤٩) وبناهد

أيضا ان مكرى م في مقدار المجهولين س ر س واحد الآلة التي

قبل الأخيرة الناجمة من الكسر المتسلسل المتكون من الكسر لا عبادي و

نحوها كمثالا للتوضيح والنظر هو ان الرتبة داخل المعادلة

$$٤٩ + س = ٦٥$$

فاننا نحل بالنسبة لمجهول متبوع بأصغر مكرر كما نجد س مثلا ثم نستخرج

العدد الصحيح الذي يوجد في مقدار واحد مجهول ليدخل

$$٤٩ - ٦٥ = س - ١٠ = ١٠ - ٦٥ = -٢٦$$

وكي يكون مقدار صحيح مفروض للمجهول س نعين مقدار صحيح للمجهول س

(۱۱)

و رار الخارج الصحيح من قسمة د على ح بالرمز ك وللباقى بالرمز هـ  
 نحصل د = ك + هـ ، س = - ك + هـ +  $\frac{هـ}{ح}$

ونكي بحدث من المقدار الصحيح المفروض للجهول ص مقدار صحيح للجهول  
 س يلزم أن يكون  $\frac{هـ}{ح}$  عددًا صحيحًا إذا رمز له بالرمز و نحصل  
 $\frac{هـ}{ح} = ص$  و ن = س = - ك + هـ + و

وإذا استخرج مقدار ص من المعادلة  $\frac{هـ}{ح} = ص$  و جعل ك  
 رمزًا للخارج الصحيح من قسمة د على هـ و جعل هـ رمزًا للباقى فنحصل  
 د = ك + هـ ، ص =  $\frac{هـ}{ح}$  و = - ك + و +  $\frac{هـ}{ح}$   
 وبمثل ما تقدم يتحصل أيضًا

$\frac{هـ}{ح} = و$  ، ص = - ك + و +  $\frac{هـ}{ح}$

وبنواى هذا العمل على العددين د و يشاهد أنه لا يختلف عن العمل  
 الذى يجرى لإيجاد القاسم المشترك الأعظم بينهما وحيث أنهما أوليان  
 متافيتوصلا إلى باقى واحد

فإذا كان هذا الباقى حادًا من تقسيم هـ على ك كان

د = ك + ١ و عليه فيكون د =  $\frac{هـ}{ح}$  + ١ = - ك + و +  $\frac{هـ}{ح}$  + ١

ومن فرض  $\frac{هـ}{ح} = و$  و يحدث د = - ك + و ، و = هـ - ك و

ولتصل مقدارى س و بدالة غير المعين و يوضع المقدار هـ - ك

ثُمَّ يَخْتَلِفُ فِي مَعَادِلَةِ (٩)

عدد صحيحاً فان من لهذا العدد غير المعين بالرمز و

(۳) ..... و (۴) ..... و (۵) ..... و (۶) ..... و (۷) ..... و (۸) ..... و (۹) ..... و (۱۰) ..... و (۱۱) ..... و (۱۲) ..... و (۱۳) ..... و (۱۴) ..... و (۱۵) ..... و (۱۶) ..... و (۱۷) ..... و (۱۸) ..... و (۱۹) ..... و (۲۰) ..... و (۲۱) ..... و (۲۲) ..... و (۲۳) ..... و (۲۴) ..... و (۲۵) ..... و (۲۶) ..... و (۲۷) ..... و (۲۸) ..... و (۲۹) ..... و (۳۰) ..... و (۳۱) ..... و (۳۲) ..... و (۳۳) ..... و (۳۴) ..... و (۳۵) ..... و (۳۶) ..... و (۳۷) ..... و (۳۸) ..... و (۳۹) ..... و (۴۰) ..... و (۴۱) ..... و (۴۲) ..... و (۴۳) ..... و (۴۴) ..... و (۴۵) ..... و (۴۶) ..... و (۴۷) ..... و (۴۸) ..... و (۴۹) ..... و (۵۰) ..... و (۵۱) ..... و (۵۲) ..... و (۵۳) ..... و (۵۴) ..... و (۵۵) ..... و (۵۶) ..... و (۵۷) ..... و (۵۸) ..... و (۵۹) ..... و (۶۰) ..... و (۶۱) ..... و (۶۲) ..... و (۶۳) ..... و (۶۴) ..... و (۶۵) ..... و (۶۶) ..... و (۶۷) ..... و (۶۸) ..... و (۶۹) ..... و (۷۰) ..... و (۷۱) ..... و (۷۲) ..... و (۷۳) ..... و (۷۴) ..... و (۷۵) ..... و (۷۶) ..... و (۷۷) ..... و (۷۸) ..... و (۷۹) ..... و (۸۰) ..... و (۸۱) ..... و (۸۲) ..... و (۸۳) ..... و (۸۴) ..... و (۸۵) ..... و (۸۶) ..... و (۸۷) ..... و (۸۸) ..... و (۸۹) ..... و (۹۰) ..... و (۹۱) ..... و (۹۲) ..... و (۹۳) ..... و (۹۴) ..... و (۹۵) ..... و (۹۶) ..... و (۹۷) ..... و (۹۸) ..... و (۹۹) ..... و (۱۰۰) .....

رجيتي فقد انا ابحت عن حلول الصحيحة للمعادلة (1) الى البحث عن الحلول الصحيحة

العادة (ج) التي فيها مكر المجهولين ايسر منها في الاولى ومن المشاهد انه لا يمكن

ستحتاج تخمين مشابه للتقدم إلا إذا جعلت المعادلة بالنسبة للمجموع المتبوع بأصغر

مكرر بحيث إذا جرى هذا العمل على المعادلة (٤) تحصل

$$\frac{37-2}{18} + 9 = \frac{349-2}{18} = 19$$

چیتہ یلزم ان یكون  $\frac{27-3}{4}$  عددا صحیحاً فاذا رزله بالرمز و تحصل

(5) ..... و = ص = - و + و (4) ..... و =  $\frac{34 - 4}{14}$

وإذا فقد الـبحث عن الحلول الصحيحة للمعادلة (٤) إلى البحث عن الحلول الصحيحة

المعادلة (٤)

وبتوالی العمل علی هذا المنوال يتحصن

$$\therefore \frac{9x-3}{4} + 3c = \frac{9(17-3)}{4} = 9$$

تحریر

$$2 \quad \frac{2}{4} - 1 = \frac{2-4}{4} = -\frac{2}{4}$$

(9) ..... و - و = و و (A) ..... و

وَأَمَّا قَوْلُهُ الْمَقْدُورَةُ

فَإِنَّهَا لَا تَكُونُ إِلَّا بِإِذْنِ اللَّهِ

وَبِإِذْنِ اللَّهِ

فَوَلَدَ سَبْعَ كِلْمٍ مِنْ مَعْنَى أَنَّهَا لَا تَكُونُ إِلَّا بِإِذْنِ اللَّهِ  
 مِنْ سَبْعَ كِلْمٍ كَقَوْلِهِ وَهُوَ عَنِ السَّيِّئَةِ لَا يَكُونُ إِلَّا بِإِذْنِ اللَّهِ  
 مِنْ سَبْعَ كِلْمٍ وَهُوَ كَقَوْلِهِ وَهُوَ عَنِ السَّيِّئَةِ لَا يَكُونُ إِلَّا بِإِذْنِ اللَّهِ  
 فِي الْمَقْدُورَةِ أَنْ يَكُونَ كَقَوْلِهِ وَهُوَ عَنِ السَّيِّئَةِ لَا يَكُونُ إِلَّا بِإِذْنِ اللَّهِ  
 بِإِذْنِ اللَّهِ

وَيَكُونُ أَيْضًا كَقَوْلِهِ وَهُوَ عَنِ السَّيِّئَةِ لَا يَكُونُ إِلَّا بِإِذْنِ اللَّهِ  
 الْمَقْدُورَةِ

وَيَكُونُ أَيْضًا كَقَوْلِهِ وَهُوَ عَنِ السَّيِّئَةِ لَا يَكُونُ إِلَّا بِإِذْنِ اللَّهِ  
 وَهُوَ كَقَوْلِهِ وَهُوَ عَنِ السَّيِّئَةِ لَا يَكُونُ إِلَّا بِإِذْنِ اللَّهِ  
 وَهُوَ كَقَوْلِهِ وَهُوَ عَنِ السَّيِّئَةِ لَا يَكُونُ إِلَّا بِإِذْنِ اللَّهِ  
 وَهُوَ كَقَوْلِهِ وَهُوَ عَنِ السَّيِّئَةِ لَا يَكُونُ إِلَّا بِإِذْنِ اللَّهِ

وَهُوَ كَقَوْلِهِ وَهُوَ عَنِ السَّيِّئَةِ لَا يَكُونُ إِلَّا بِإِذْنِ اللَّهِ

وَمِنْ هَذِهِ الْمَقَادِيرِ الْأَخِيرَةِ يَحْدُثُ عَنِ السَّيِّئَةِ لَا يَكُونُ إِلَّا بِإِذْنِ اللَّهِ

عَنِ السَّيِّئَةِ لَا يَكُونُ إِلَّا بِإِذْنِ اللَّهِ

بما أن مجموعها أو بين معادلاته يتوصل بها إلى إجراء عمل على كبرى البسائط  
بما أن هذه هي مشتركة الأعظم

وما ذكرنا من المعادلات في المعادلات المتوالية الناتجة من العمل فهي البواقي المتوالية  
للمعادلة من هذه المعادلات حيث كان أحد هذه البواقي مساوياً بالضرورة للواحد  
فيكون البحث عن حلولها متوالية ارتباطاً بالبحث عن الحلول الصحيحة للمعادلة الأخيرة  
أي يكون فيه مكرراً غير محتمل أن يكرر الأخر مساوياً للواحد بمعنى أنه يمكن التحصيل  
تدريجياً غير المتعبر لما ذكرنا أن يفرض غير المعين الأخير مقدار صحيح  
بما أن تقدم من الحسابات قابل للاختصار

بما أن قدر المعادلة ٤٩ س + ٦٥ ص = ٤٩٣

نقسم بها س =  $\frac{٤٩٣ - ٦٥ ص}{٤٩}$

نمؤخذ بدل العدد ٤ الذي هو الجزء الصحيح من خارج قيمة ٦٥ على ٤٩  
في باقيها ١٧ الخارج الصحيح ٣ فيكون الباقي ٧ ونأخذ عليه يكون

$$س = ١٠ - ٣ ص + \frac{٧ ص}{٤٩}$$

فإذا فرضنا أن  $\frac{٧ ص}{٤٩}$  هو عدد صحيح

$$ص = \frac{٤٩ - ٧ س}{٧} + ٣$$

ولأنه يكون مقدار ص صحيحاً يلزم أن يكون المقدار  $\frac{٤٩ - ٧ س}{٧}$  صحيحاً وحيث أنه  
يمكن وضع المقدار  $\frac{٤٩ - ٧ س}{٧}$  بالصورة  $\frac{٤٩ - ٧ س}{٧}$  وأن العددين ٧ و ٤٩ أوليان

(٤١٨)

١٤٦٦ القانونان الناتجان من حل المعادلة  $٤٤ = ٦٥ + ٣$  المذكورات  
(في بندى ١٣٠ و ١٣١) اللذان يختلفان في الصورة عن القانونين المستخرجين  
من المعادلة المذكورة المتقدمين (في بندى ١٣١، ١٣٢) يكونان متكافئين  
لأنه إذا أخذ القانونان

$$٣ = ٤٦٧ - ٦٥ \quad و \quad ٥ = ١٧٠١ - ٤٤$$

المتقدمان (في بندى ١٣١) وقم العدد ٤٦٧ على ٦٥ والعدد ١٧٠١

على ٤٤ تحصل

$$٤٦٧ = ٦٥ \times ٧١ + ٣ \quad , \quad ١٧٠١ = ٤٤ \times ٣٩ + ٥$$

$$٣ = ٤٦٧ - ٦٥ \quad و \quad ٥ = ١٧٠١ - ٤٤$$

وإذا فرض أن  $٧١ - ٥ = ٥$  ونحصل

$$٣ = ٤٦٧ - ٦٥ \quad و \quad ٥ = ١٧٠١ - ٤٤$$

١٤٦٧ من المعالومات ثم ننكحها إلى هنا الأعلى طريقة تعيين الحلول الصحيحة موحدة كانت  
أو سالبة ولتتصدى لأن لا اختبار الحالة التي يراد فيها تعيين الحلول الصحيحة

الموجبة فقط فنقول —

أنه يمكن في المعادلة العمومية  $٣ = ٤٦٧ - ٦٥$  أن نجد  $٣$  يكون موجباً لأنه

إن كان سالباً أمكن تحويله إلى موجب بتغيير علامات طرفي المعادلة عند ثورته

وجنيد لا تخرج جميع الحالات المبينة بعلامات  $٣$  و  $٥$  من المعادلات الأربع التي هي

(٤١٧)

هـ = متى كان للكية المعلومة هـ في المعادلة حـ س + و ص = هـ مع أحد مكررى

المجهولين مضروب مشترك مكرى مساوٍ وهلة تحوّل هذه المعادلة الى اخرى

أبسط منها لانه اذا فرض أن ح = م ، هـ = هـ (بجعل ح، و دالين

على عدد صحيح) آت المعادلة المفروضة الى اخرى هي

$$ح س + \frac{و ص}{م} = هـ$$

ولكى تكون حلول هذه المعادلة صحيحة يلزم أن يكون و ص قابلاً للقسمة

على م وحيث أن د اولى مع م فيكون و قابلاً للقسمة على م

فادارمز لهذا الخارج بالرمز عى تحصل و ص = م عى وبنأ عليه يكون

$$ح س + د عى = هـ$$

ويمكن استعمال هذا الاختصار في المعادلة ٤٤ س + ٦٥ و ص = ٤٣ <sup>مئة</sup> المتقد

حيث أن كلام من مكرر المجهول س الذى هو ٤٤ والكية المعلومة ٤٣ يقبل

القسمة على ٣ وبنأ على ذلك اذا فرض أن و ص = ٣ عى آت المعادلة المتقدمة

الى ٨ س + ٦٥ عى = ٨١ ومنها يحدث

$$س = \frac{٨١ - ٦٥ عى}{٨ - ٣} = \frac{٦٥ عى - ٨١}{٥}$$

ربنم من  $\frac{٦٥ عى - ٨١}{٥} = ١٠ - ٨ عى$  و أن عى = ١ - ٨ و فاذا ابدل عى بمقداره في

المعادلة المذكورة وفي معادلة و ص = ٣ عى تحصل

$$س = ٤ + ٦٥ و و و ص = ٣ - ٤٤ و$$





$$r = \frac{d}{d} = 1$$

$$r = \frac{d}{d} = 1$$

$$r = \frac{d}{d} = 1$$

$$r = \frac{d}{d} = 1$$

محصن  $d, d, d$  هي كرات موجبات موجبة

وأما المعادلة الثالثة فلا تختلف في الحركات الثانية وأما الرابعة فليس لها

حركات وجبت بكونها موجبات موجبات الأولىين

وتدشود بما تقدم له من الدورات حلًا للمعادلة  $d + d = d$

تحصت نهايتهم بكونها الموجبة بواسطة القانونين

$$d + d = d, \quad d - d = d$$

ولكن يكون من قدر  $d$  موجبات بلزم أن يكون

$$d + d < d, \quad d - d < d$$

$$d < d, \quad d < d$$

ولا ينبغي أن يفرض غير العين و إلا المقادير الصحيحة الموجبة أو السالبة

المحصورة بين النهايتين  $- \frac{d}{d}, \frac{d}{d}$  وجبت يكون عدد الحلول

الصحيحة منها أولئك يشاهد بأن سهولة من المعادلة المفروضة لأنه إن لم

يتمحصل عدد صحيح محصور بين النهايتين  $- \frac{d}{d}, \frac{d}{d}$  كانت المعادلة غير

محققة

في المعادلة (١) مقدار  $r$  بدالة غير المعين  $و$  نوصف المعادلة بالدرجة

$ج + و = هـ$   $= ك$  فإن كانت هذه المعادلة منحلولة صحيحة وكانت مبتدأ متساوية

محتوية على  $ع$  وبدالة غير المعين  $و$  وإذا أبدلنا المعين بدالة  $و$

بمقداره في مقدار  $س$  من المستخرجين من معادلة (٢) نحصل

المجاهيل الثلاثة بدالة غير المعين الصحيح  $و$

فإذا كان مكررا  $هـ$  أوليين معا فإنه يمكن أن يكون للمعادلة (٢) مقدار

صحيحة حتى يكون للمعادلتين (١) (٢) حلول صحيحة أيضا ويجب فقط مقدار

من مقادير  $س$  من صحيحين ومحققين للمعادلة (٢) نحصل بواسطة (٢) مقدار

المعادلة (١) مقدار صحيح للجهول  $ع$  لأنه إذا فرضنا  $س = ج$   $و = ك$

هو الحل الصحيح للمعادلة (٢) نحصل المتساوية

$(ج - هـ) = (هـ - ك) + (ك - ج) = هـ - هـ$  ومنها نجد

$هـ = (ج - ك) = (م - ج) - (ك - ج)$

وحيث فرضنا  $هـ$  أوليان معا فيكون  $هـ$  قاسما لكل من  $ج - ك$  و  $ك - ج$

ونجعل  $ر$  رمز الخارج القسمة يتحصل

$ج + و = ك + هـ = م$

ولكن يكون مقدار  $\frac{1}{2}$  من سوجين يلزم أن يكون  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$  ح  $\frac{1}{2}$  .  
 وجنث يوجد غير اثنين ومقادير عدد هـ الألفا في تكون محققة للتباينين  
 المسدتين لأنه يمكن التحقق كلتا التباينين أن يكون  $\frac{1}{2}$  أكبر من عظم الجنتين  
 $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$  و بناء على ذلك نتحصل حلول صحيحة موجبة غير منتهية العدد

في الحلول الصحيحة بعدة معادلات ذات درجة أولى محبوبة  
 على مجاهيل عدد هـ ينز بد عن عدد المعادلات المذكورة

١٢٨ إذا فرضت المعادلتان العوميتان

$$(1) \dots\dots\dots م = ح + و + س$$

$$(2) \dots\dots\dots م = ح + و + س$$

وحذف من بينهما أحد المجاهيل وليكن ح مثلاً فإنه يتحصل

$$(3) \dots\dots\dots م = و + س$$

وجنث فقد أبدلت معادلتا (١) و (٢) بمعادلتى (١) و (٣) فإن كان للمعادلة

(٣) حلول صحيحة استنتج منها مقدارا س و و بداة غير معينين وليكن و

و عليه فتؤول المسئلة الى تعيين المقادير الصحيحة لغير المعين و بحيث اذا وضع

مقدارا س و في المعادلة (١) نتحصل مقدار صحيح للجمل ح لأنه اذا وضع

في المعادلة

(٤٤٢)

$$٧٧٤٦ = ص ٣٤ + س ٣٩$$

وجنيد فقد آلت جملة المعادلات المفروضة الى المعادلات الثلاث

$$١٣ س + ٥ ص - ٤ ع + ٩ ط = ٥٥٩ \quad د$$

$$٩٧ س + ٥٣ ص + ٤ ع = ١٩١٧٥ \quad هـ$$

$$٧٧٤٦ = ص ٣٤ + س ٣٩$$

ثم يبحث عن القانونين اللذين تعلم بواسطتهما المحلول الصحيحة للمعادلة ذات  
الجهولين  $٧٧٤٦ = ص ٣٤ + س ٣٩$  وحيث أن مكرر س يقبل  
القسمة على المضروب ٣ الذي يقسم العدد ٧٧٤٦ وأن مكرر ص  
يقبل القسمة على المضروب ٤ الذي يقسم العدد ٧٧٤٦ فيمكن  
اختصار الحساب بفرض  $س = ٤ س$  و  $ص = ٣ ص$  وجنيد تووول المعادلة  
المفروضة الى

$$١٢٩١ = ١٧ ص + ١٣ س$$

واذا علمت هذه المعادلة بمقتضى ما تقدم فانه يتوصل الى

$$\begin{aligned} ص = ١٣ + ١٧ س \quad و \quad ١٣ + ١٧ س = ١٧ - ٩٨ س \\ ص = ٣٩ + ٣٩ س \quad و \quad ٣٩ + ٣٩ س = ٣٩ - ١٩١ س \end{aligned}$$

(٤٤)

يجب أن تكون المعادلة (١) متحققة بالمقادير

$$ص = ع , ص = ك , ع = ح$$

ويستج من ذلك أنه متى كان مكرراً هـ هـ أوليين معاً استخراج من معادلة

(٢) مقداراً ص ص بدالة غير المعين و ثم يوضع هذان المقداران في

معادلة (١) فتؤول إلى معادلة يستخرج منها مقدار المجهول ع بدالة غير

المعين و

سند ولمزيد التوضيح والتبين على ذلك نفرض المعادلات الثلاث الرقمية وهي

$$١٢ ص + ٥ ص - ٤ ع = ط ٤ = ٥٥٩$$

$$٨ ص + ٧ ص + ٢ ع - ط ٥ = ١٥٩٥$$

$$١١ ص - ٣ ص + ٥ ع - ط ٧ = ١٥٧$$

ثم يحدف المجهول ط من بين المعادلة الأولى وكلتا المعادلتين الأخريتين

فتحصل المعادلتان

$$٩٧ ص + ٥٢ ص + ٤ ع = ١٩١٧٥$$

$$١٢٥ ص + ٤٢ ص + ٦ ع = ٢٦٥١١$$

ويحدف المجهول ع من بين هاتين المعادلتين فتحصل

فإذا كان لا يطلب غير الحلول الصحيحة أمثلة في ما يلي من حيث يتجوز :  
 واثبت :  $\frac{197}{78}$  تعني  $\frac{10}{17}$  ، وجب أن يوجد  $10$  في  $17$  مرة  $170$  مرة  $170$  مرة

$$\left. \begin{array}{l} 146 = س \\ ٣ = ح \\ ٤ = ص \\ ١٢٥ = ط \end{array} \right\} \text{تصل} \left\{ \begin{array}{l} ١٤٨ = س \\ ٨١ = ص \\ ٤٣٢ = ح \\ ٢٣٥ = ط \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} ١ = و \\ ٤ = ز \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} ٦٠ = س \\ ١٥٩ = ص \\ ٤٦٦ = ح \\ ١٧٥٠ = ط \end{array} \right\}$$

ننته ونستدعي الآن لذكر الحالة التي براد فيها تعين الحلول الصحيحة لمعادلة  
 مشتملة على مجاهيل عددها يزيد عن اثنين فنقول

إذا فرضت المعادلة  $س + ص + ح = ع$  نشهد أنه إذا كانت  
 لمكرات  $س, ص, ح$  مضروب مشترك لا يضم البكبة المعلومة  $ع$  كانت  
 المعادلة غير متحققة بمقادير  $س, ص, ح$  الصحيحة وعليه ولا يلزم  
 بعد الاختصار أن يكون للمكرات  $س, ص, ح$  مضروب مشترك

وإذا كان مكرات  $س, ص, ح$  أوليين معاً أمكن أن يبرهن للمجهول  $ع$  مقدار  
 به يحدث لكل من المجهولين  $س, ص$  عدة غير تساهبة من عدد  $١٧٥٠$   
 ولتحصيل القانونين اللذين بواسطتهما تعلم من أول ورشة مقدار  $س, ص$   
 المطابقة لكل مقدار يصرح للمجهول  $ع$  فوضع المعادلة  $س + ص = ع$

(٤٠٥)

وإذا وضع في المعادلة  $٩٧س + ٥٣ص + ٤ع = ١٩١٧٥$  بدل

٣٣٠ بـ س، ص مقدارهما المميزان بدالة غير المعين وتحصل

$$١٤٣١ - ٤ = ٤٠ = ٤ -$$

ومن هذه المعادلة يستخرج مقدار ج، و بدالة غير معين آخر و

$$٤٠ = ٤ - \text{ و } ١٤٣١ = ٤ +$$

ثم يوضع بدل و مقداره ٤ و في مقدارى س ص السابقين فيؤتى لآلى

$$ص = ٧٨ + ٣ \text{ و } س = ١٩٦ - ٦٨ \text{ و}$$

ثم يوضع بدل س، ص، و في المعينة بدالة غير المعين و مقاديرها في المعادلة

$$١٣س + ٥ص - ٤ج + ٤ط = ٤٥٥٩ \text{ فيحصل}$$

$$٧٣٩ - ط = ط \text{ ومنها يحدث}$$

$$ط = ٢٣٩ \text{ و}$$

وحيث كان مقدار ط المعين بدالة و صحيحاً فيكون الحساب منتهاً

وبالجملة فتعين الحلول الصحيحة لجملة المعادلات المفروضة بواسطة القوانين

$$س = ١٩٦ - ٦٨ \text{ و } ص = ٧٨ + ٣ \text{ و}$$

$$٤ = ٤ + ١٤٣١ \text{ و } ط = ٧٣٩ \text{ و}$$

.....



ثم ياتي بعد هذا من نص و...  
 وحيت به لم يكن له...  
 ح, د, ه غير اولية معا فتوصل بمعادلة ه ح + د = ١٧١ او مقدار  
 ح, د, ه بدالة غير المعين الصحيح و ثم بوضع بدل و مقداره في مقدار  
 س, ص المتقدمين فيحصل مقدارهما بدالة غير المعين. و...  
 مثلا اذا فرض انه اريد حل المعادلة

$$١٥ س + ١٠ ص + ٤ د = ١٧١ \quad \text{توضع هكذا}$$

$$٥ س + ١ ص = \frac{١٧١ - ٤ د}{٢}$$

$$\text{وبفرض } \frac{١٧١ - ٤ د}{٢} = ٤ د \quad \text{و يحصل}$$

$$٥ س + ١ ص = ٠ \quad \text{ومها استخراج}$$

$$س = - د, \quad ٤ د = د - ٤ د \quad \text{وتوصل بالمعادلة}$$

$$\frac{١٧١ - ٤ د}{٢} = ٠ \quad \text{و}$$

$$٥٧ - ٤ د = ٠ \quad \text{و} \quad ٤ د = ٥٧$$

فإذا اهدل وبالمقدار ٥٧ - ٤ د في مقدارى س, ص المتقدمين نحصل

$$ح س + د ص = ع - هـ ع$$

ثم يفرض لزيد الاختصار أن  $ع - هـ ع = م$  فيحصل

$$ح س + د ص = م$$

ثم يستخرج من هذه المعادلة مقداراً  $س$  رص بالنسبة لكل من  $م$  وغير المعين  
و فإذا أبدل  $م$  بالمقدار  $ع - هـ ع$  فيحصل مقداراً  $س$  رص بالنسبة لكل من  
 $ع$  وغير المعين و

وتختصر هذه الكيفية متى وجد بين المكررات الثلاثة  $د ر د هـ$   
اشان غير أوليين معاً مثلاً إذا فرض أن  $د = ح ك ر$  و  $ك = ز ك آ$  آت  
المعادلة المفروضة الى

$$ح س + د ص = \frac{ع - هـ ع}{ك}$$

ولكي يكون مقداراً  $س$  رص صحيحين يلزم أن يكون  $ع - هـ ع$  قابلاً للعقمة  
على  $ك$  فإذا رز من الخارج القسمة بالرمز و تحصل  
 $\frac{ع - هـ ع}{ك} = و$  ومنها يجد

$$ح س + ك و = ع$$

وعليه فتقول المعادلة المتقدمة الى

ح س



(٤٤٩)

$$س = ٧ - ٤ - ٥ = ٥ \text{ و } ص = ٥ + ٤ - ١١ = ٨$$

رسمه في التوابين التي بواسطتها تتعين الحلول الصحيحة للمعادلة المفروضة هي

$$س = ٥٧ - ٤٠ - ٥ = ١٢ \text{ و } ص = ٥ + ٤ - ١١ = ٨ \text{ , ج} = ٣$$

التي يفرض فيها الكل من غير المعينين و، ل جميع ما يبرأ من الاعداد الصحيحة  
ولكي يكون مقدار ج الصحيح موجبا يلزم أن نفرض لغير المعين و متاثير  
موجبة ويلزم ايضا لجعل مقدار س، ص موجبين أن يكون

$$ل < \frac{٥٧ - ٤٠}{٥} \text{ و } ل < \frac{١١ - ٤}{٥}$$

ويؤخذ من هاتين المتباينتين أن

$$\frac{٥٧ - ٤٠}{٥} < \frac{١١ - ٤}{٥} \text{ ومنها يحدث}$$

$$٥٧ > ١١ \text{ أي } ١٧$$

وجنبا لا يمكن أن يفرض لغير المعين و الا المتاثير ١٠، ١١، ١٢ فاذا كان

$$٥ = ٧ - ٤ - ٥ = ٨ \text{ فيكون ل} < \frac{٥٧}{٥} \text{ ولذا يمكن أن يفرض أن } س = ٣$$

$$أو ٤، أو ٥، أو ٦، أو ٧، أو ٨$$

واذا كان ١ = ٧ - ٤ - ٥ = ٨ وجب أن يكون ل < \frac{٥٧}{١} وحينئذ يكون

$$ل = ١٥، أو ١٦، أو ١٧، أو ١٨$$

واذا كان

(٢٤)

$$\left. \begin{array}{l} ٤ = ص \\ ٣ = س \end{array} \right\} (١) \quad \left. \begin{array}{l} ٤ = ع \\ ٨ = س \end{array} \right\} (٢)$$

### المسألة الخامسة

عدة من الرجال والنساء صرفوا خمسين فرنكاً في دسكرة لخص كل رجل ٥٠ سنتيماً وكل امرأة ٦٥ سنتيماً والتمار معرفة عدد الرجال والنساء عند ذلك يقال  
إِذَا جَعَلَ س رُمُزَ الْعَدَدِ الرَّجَالِ وَص رُمُزَ الْعَدَدِ النِّسَاءِ كَانَتْ لِهَذِهِ  
المسألة حلول أربعة هي

$$\left. \begin{array}{l} ١١ = ص \\ ١٧ = س \end{array} \right\} (١) \quad \left. \begin{array}{l} ١٨ = ص \\ ٣٦ = س \end{array} \right\} (٢) \quad \left. \begin{array}{l} ١٥ = ص \\ ٥٥ = س \end{array} \right\} (٣) \quad \left. \begin{array}{l} ٤ = ص \\ ٧٤ = س \end{array} \right\} (٤)$$

### المسألة السادسة

إذا كان المراد معرفة العدد الذي باقى قسمته على ٣٩ باوى ١٦ وباقى  
قسمته على ٥٦ باوى ٧

يقال في الجواب عن ذلك أنه يتوصل إلى حل هذه المسألة بالقانون العمومى

$$٢ = ١١٤٧ + ١٨٩$$

الذى نعلم منه جميع الأعداد المحققة لمنطوق المسألة وحينئذ يكون أصغر

## المسألة الثانية

إذا كان المراد قسمة ٧٠ غرشاً إلى قطع من النقود منها ما قيمته خمسة غروش فيها مائة ستة عشر غرشاً :

يجاب عن ذلك فيقال إذا من القطع التي قيمتها واحد واحد غروش بالرمز س  
والتي قيمتها عشرة غرشاً بالرمز ص نتي من ذلك لهذه المسألة ثلاثة حلول

$$\left. \begin{array}{l} ١٠ = س \\ ١ = ص \end{array} \right\} (١) \quad \left. \begin{array}{l} ٦ = س \\ ٤ = ص \end{array} \right\} (٢) \quad \left. \begin{array}{l} ٤ = س \\ ٢ = ص \end{array} \right\} (٣)$$

## المسألة الثالثة

إذا كان المراد تقسيم ٧١ غرشاً إلى قطع من النقود منها ما قيمته خمسة غروش ومنها ما قيمته عشرون غرشاً يقال أنه لا يوجد لهذه المسألة حل صحيح

## المسألة الرابعة

إذا كان المراد قسمة ٤٦ غرشاً إلى قطع من النقود منها ما قيمته خمسة غروش ومنها ما قيمته عشرون غرشاً

يقال في الجواب أنه إذا من لعد القطع المذكور بالرمز ص وللثانية بالرمز س

نتي من ذلك حلونها

(٤٣٤)

$$\left. \begin{array}{l} ٥٠ = ص \\ ٤٠ = ص \\ ٣٠ = ع \end{array} \right\} (٤) \quad \left. \begin{array}{l} ١٥ = ص \\ ١٤ = ص \\ ١٥ = ع \end{array} \right\} (١)$$

بينه <sup>١٤٧</sup> وحيث كان الحل غير المعين للمعادلات التي تزيد درجتها عن الدرجة الأولى لا يندرج تحت ما ذكر فلم تنصده هنا إلا للحالة التي تكون فيها المعادلة ذات الدرجة الثانية والمجهولين غير محتوية على الدرجة الثانية لأحد المجهولين ويمكن اعتبار البحث عن حلول هذه المعادلة كالبحث عن الحل غير المعين لمعادلة ذات درجة أولى بأن يقال

كل معادلة ذات درجة ثانية ومجهولين غير محتوية على القوة الثانية لأحدهما توضع هكذا

$$م س ص + م ش + ع س + ك ص = ص ..... (١)$$

فاذا حللت هذه المعادلة بالنسبة للمجهول ص تحصل

$$ص = \frac{م ش - ع س + ك ص}{م س + ك} \dots \dots (٢)$$

واذا أُجْرِيَتْ عملية القسمة الكائنة في هذا المقدار فإنه يحدث

$$ص = \frac{م ش - ع س + ك ص}{م س + ك} + \frac{م ش - ع س + ك ص}{م س + ك} - \frac{م ش - ع س + ك ص}{م س + ك}$$

ونحن هنا نجد

## المسألة السابعة

رجل اشترى مائة ماشية من خيل وبغال وحمر بمبلغ مائة من الاكياس وكان  
 ثمن الفرس الواحد يا وى ثلاثة اكياس وثمانين كيس وثمان البغل الواحد يا وكيساً  
 وثلث كيس وثمان الحمار الواحد يا ونصف كيس والمراد معرفة عدد كل من هذه الأجناس  
 فحل هذه المسئلة يقال اذا رمز بالرمز س لعدد الخيول وبالرمز ص لعدد  
 البغال وبالرمز ع لعدد الحمير كان لهذه المسئلة ثلاثة حلول هي

$10 = س$	$10 = س$	$0 = س$
$6 = ص$	$42 = ص$	$44 = ص$
$79 = ع$	$66 = ع$	$02 = ع$

## المسألة الثامنة

ماهي الأعداد الثلاثة الرموز لها بالرموز س، ص، ع التي اذا ضرب  
 الاول منها في ٣ والثاني في ٥ والثالث في ٧ كان مجموعها سائوياً  
 ٥٠ واذا ضرب الأول في ٩ والثاني في ٤ والثالث في ٦٩ كانت  
 مجموع الحواصل الجزئية سائوياً ٩٤٠  
 لذلك يقال أن هذه المسئلة يكون لها بعد اجراء العملية حلان هما



بسم الله الرحمن الرحيم

وَمِنْ بَيْنِ مَا كُنَّا نَعْمَلُ

أَن نُرِيَنَّكَ الْآيَاتِ

الْبُرْهَانِ

فَمِنْ بَيْنِ مَا كُنَّا نَعْمَلُ

وَأَنَّكَ إِن تَتُوبْ إِلَىٰ رَبِّكَ

مَعَادُ الْغُفْرِ إِنَّكَ لَمِنَ الْمُفْلِحِينَ

يَتَخَفُونَ خِيفَتِي أُولَٰئِكَ

الَّذِينَ هُمْ عَنْ عَذَابِي

أَشَدَّ حَسْرَةً خِيفَتِي

يَوْمَ تَدْعُوهُمْ إِلَىٰ عَذَابِي

وَيَكْفُرُونَ بِوَعْدِي

أُولَٰئِكَ هُمُ الْمُفْلِسُونَ

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

وذلك يجعل لك كفاية عن ثم + م مع ك - م ك

ولكى يكون كلام مفادى  $\text{م}$  عدداً صحيحاً يلزم أن يكون  $\text{م} + 1$  عدداً صحيحاً ثم بحسب قواعد العدد  $\text{ل}$  ويجعل كل منهما  $\text{م}$  أو  $\text{م} + 1$  وسبقاً بعلامة  $+$  - فإن تحصل من المعادلات الناتجة من ذلك

مقادير صحيحة للجهول  $S$  وُضِعَتْ هذه المقادير في المعادلة (٣) لاستخراج مقادير  $s$  ولكن كون هذه المقادير صحيحة يلزم أن يكون الطرف الثاني من المعادلة (٣) الذي يؤول إلى كمية معلومة قابلاً للقسمة على  $m$

ومن العلوم أن عدد الحلول الصحيحة يكون دائماً منتهياً وقد لا يتيسر الحصول على واحد منها فإذا سلكنا هذه الطريقة في حل كل من المعادلات

الثلاث

ع س ص - م س ص + ا = ع

6.  $18 + 3 + 5 = 55$

۴۹ میں ص + ثی = ۴۰ س + ۳ ص + ۹

1980

9. 1. 1991

ثم إذا كان العدد في قاسمها الخامس لضرب ح د مركب من المضروب  
ح د وكان أول باساع المضروب ح كان قاسما للمضروب لآخر د  
وللبرهنة على ذلك بفرض أن ح ه ثم يفرض أنه سري على عدد د  
ح ه على مثابه لعملية القاسم المشترك لأعظم بينهما فإذا فرضنا أن  
المتوالية الناتجة من هذا العمل بالرموز ك ، ل ، م ، ن ، ... هي المتوالية  
المتوالية بالرموز ه ، ز ، ح ، ط ، ... فنحصل

$$1 + 2 = 3$$

$$c' + \frac{1}{2}c = 2$$

ويعضب كل من طرفي هذه المتساويات في العدد  $n$  وقتها على عدد

فجس

$$\dots\dots\dots \frac{52}{8} + 1 \times \frac{4}{8} = 5, \quad \frac{52}{8} + 1,5 = \frac{59}{8}$$

وحيث أن الطرف الأول  $\frac{1}{2}$  من المتساوية الأولى عدد صحيح فيكون،

صحيح الجبري من وفرض أن  $ص = ح + ك$  و (يجعل  $و$  رمزاً لعدد صحيح)  
فانه يحدث

$$ص = ح + ك - ح - ح = ك - ح \quad (٤٢٨)$$

وحيث فرض أن  $ح = ح + ك - ح$  قابل للقسمة على  $ك$  فيكون  
مقدار  $ص$  المطابق  $ص = ح + ك$  و عدد صحيحاً وهذه النتيجة  
لا يطرأ عليها تغير على أي وجه كانت علامة  $و$  ويؤخذ من ذلك أنه  
متى وجد للمعادلة المفروضة حلول صحيحة وكان مقدار  $ص$  محصوراً  
فيها بين الصفر و  $ك$  فادعوا جميع الحلول الصحيحة للمعادلة المفروضة  
توضع فيها بدل  $ص$  الأعداد  $١, ٢, ٣, ٤, \dots, ك - ١$   
وجبت فكل حل صحيح مطابق لأحد هذه الأعداد يحصل منه حلول أخرى  
غير منتهية

## الباب الخامس

في نظريات الأعداد الماوية

والكسور غير القابلة للتختصار

وخواص تسمية الأعداد على بعض

قواسمها ونظراً على الحدود

لأنه لما كان العدد  $m$  قابلاً للقسمة على  $n$  كان  $m = n \times k$  بفرض  $k$   
 رمزاً لعدد صحيح ولما كان العدد  $n$  قاسماً للعدد  $m$  كان قاسماً للحاصل :  
 $k$  وحيث أن  $n$  أولي مع  $n$  فيكون  $n$  قاسماً للعدد  $k$  وحينئذ يكون  
 $k = n \times l$  بفرض  $l$  رمزاً لعدد صحيح وعليه فيكون  $m = n \times k = n \times n \times l$   
 ومن هنا يعلم أن العدد  $m$  يقبل القسمة على  $n$  وعلى هذا المنوال يثبت  
 على أن العدد  $m$  يكون قابلاً للقسمة على الحاصل  $n \times n \times \dots$

### النظرية الثانية

لا يمكن تحليل أي عدد إلى مضارب أولية الا احدى واحدة  
 مثلاً اذا فرض العدد  $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$  (بجمل  $2 \times 2 \times 2 \times 3$ )  
 رموزاً للمضارب الأولية متساوية أو غير متساوية (فلا يتأتى منه سواه  
 بغير هذه الكيفية لأنه اذا فرض أن  $24 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$  (بجمل  $2 \times 2 \times 3 \times 3$ )  
 رموزاً للمضارب الأولية اخرى) كان  $24 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$   
 وحينئذ يكون الحاصل  $24 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$  قابلاً للقسمة على  $2$  فيكون  
 قابلاً للقسمة على أحد مضاربه وحيث أنه لا يقبل القسمة على مضارب  
 فيكون أحدهما متساوياً فإنه  $24 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$  وهو

من التناوية الثانية عددًا صحيحًا  
كانت القيمة  $\frac{r}{g}$  عددًا صحيحًا كذلك وهم جبراً وحيث أن  $r$  و  $g$   
عدداً أوليان معاً فيكون أحدهما باقي  $r$ ،  $r$ ،  $r$ ، ..... ماوياً  
للواحد وعليه فيكون  $\frac{r}{g} = \frac{1 \times r}{g}$  عددًا صحيحًا  
ومثل هذا يبرهن على الحالة التي يكون فيها  $a > b$

ومثل هذا يبرهن على الحالة التي يكون فيها  $\mu > 0$

شال

(الاولى) كل عدد دأولى كالعدد هـ يكون قاسماً للمحصل هـ و هـ و  
 يقسم أحد مضاربه لانه اذا كان العدد هـ لا يقسم العدد هـ كانت  
 اوليائمه وحينئذ يلزم انه يقسم هـ و كذلك اذا كان العدد هـ  
 لا يقسم العدد هـ كان اوليائمه وحينئذ يلزم انه يقسم هـ و اذا كان  
 لا يقسم العدد هـ فانه يلزم ان يكون قاسماً للعدد هـ و  
 (الثانية) كل عدد دأولى يكون قاسماً للعدد هـ يقسم العدد هـ حيث أن

(الثانية) كل عدد أولي يكون قاسماً للعدد  $n$  يقسم العدد  $n$  حيث أن

(الثالثة) متى كان العدد  $m$  قابلاً للقسمة على كل من الأعداد  $5, 7, 9$ ، فـ:

في مساوية (د هـ) (رابعة) وذلك بأن يعتبر الواحد و العدد  
في متجسدة هذه لقواسم

الثانية يؤخذ ما تقدم أن  $ا + ح + ع + ... + ح$  يكون مساوياً خارج  
قمة  $ا^2 - ا$  على  $ح - ا$  وعليه فيكون حاصل جمع قواسم العدد  $ح$

مبيناً بالمقدار

$$\frac{ا^2 - ا}{ح - ا} \times \frac{ا^2 - ا}{ح - ا} \times \frac{ا^2 - ا}{ح - ا}$$

الثالثة ينتج ما تقدم في النتيجة الأولى أن القواسم المشتركة بين جملة أعداد  
لا يمكن أن تكون تختصية على غير المضارب الأولية المشتركة بين هذه  
الأعداد وسنجد أن القواسم لا تتغير مشتركة بين جملة أعداد مساوياً كما  
ضرب جميع المضارب الأولية المشتركة و غير متساوية المشتركة بين  
هذه الأعداد

المرحلة الثانية في إثبات ما تقدم في المرحلة الأولى من أن القواسم المشتركة بين  
قائمة أعداد متساوية أو غير متساوية هي نفسها القواسم المشتركة بين  
أعدادها الأولية المشتركة و هذا ما تقدم في المرحلة الأولى من أن القواسم  
المشتركة بين أعداد متساوية أو غير متساوية هي نفسها القواسم المشتركة بين  
أعدادها الأولية المشتركة و هذا ما تقدم في المرحلة الأولى من أن القواسم

من المتبادرة المذكورة نخرج من ذلك أن المتبادر من المتبادر  
 يكون ما وياً لأحد مضاريب الحاصل وهو ..... فإنه لا يكون مضارب  
 الحاصلين متاوية بالتاخر .

### نتائج

الأولى إذا كان  $ع = ح \times د$  وفرض أن  $ح$  دالة على مضاريب  
 أولية معاً والأس  $د$   $ح$  دالة على أعداد صحيحة موجبة فن  
 البديهي أن جميع المضاريب التي يمكن تكوينها من أسس المضاريب الأولية  
 $ح$   $د$  تكون فاسمة للعدد  $ع$  وتكون قوى الضروب الأولى مبتدئة من  
 الصف  $د$  والثاني من الصف  $ح$  والثالث من الصف  $ك$  وحينئذ  
 لا يكون للعدد  $ع$  قواسم غير هذه الحاصلات الأولية لأن ذلك لا يمكن تحليل هذا العدد  
 إلى جمل متنوعة من المضاريب الأولية دون ذلك أنه يمكن بالسهولة  
 تحصيل قواسم العدد  $ع$  بحساب جميع حدود الحاصل

$$(1 + ح + ح^2 + \dots + ح^{د-1}) (1 + د + د^2 + \dots + د^{ح-1}) (1 + د + د^2 + \dots + د^{ك-1})$$

التي تكون مختلفة عن بعضها لكونه لا يوجد منها اثنان يكونان مركبين من  
 مضاريب واحدة أولية متحدة في الأس وبناءً على ذلك يكون عدة قواسم العدد



میں نے اس کے لئے ایک نیا رنگ بنایا ہے۔

اس کا نام "نیا رنگ" ہے۔

بسم الله الرحمن الرحيم

$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r^2} \right) = -\frac{2}{r^3} \frac{dr}{dt}$

7-8

1. 1940 1941 1942 1943 1944 1945 1946 1947 1948 1949 1950 1951 1952 1953 1954 1955 1956 1957 1958 1959 1960 1961 1962 1963 1964 1965 1966 1967 1968 1969 1970 1971 1972 1973 1974 1975 1976 1977 1978 1979 1980 1981 1982 1983 1984 1985 1986 1987 1988 1989 1990 1991 1992 1993 1994 1995 1996 1997 1998 1999 2000 2001 2002 2003 2004 2005 2006 2007 2008 2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019 2020 2021 2022 2023 2024 2025 2026 2027 2028 2029 2030 2031 2032 2033 2034 2035 2036 2037 2038 2039 2040 2041 2042 2043 2044 2045 2046 2047 2048 2049 2050 2051 2052 2053 2054 2055 2056 2057 2058 2059 2060 2061 2062 2063 2064 2065 2066 2067 2068 2069 2070 2071 2072 2073 2074 2075 2076 2077 2078 2079 2080 2081 2082 2083 2084 2085 2086 2087 2088 2089 2090 2091 2092 2093 2094 2095 2096 2097 2098 2099 2100 2101 2102 2103 2104 2105 2106 2107 2108 2109 2110 2111 2112 2113 2114 2115 2116 2117 2118 2119 2120 2121 2122 2123 2124 2125 2126 2127 2128 2129 2130 2131 2132 2133 2134 2135 2136 2137 2138 2139 2140 2141 2142 2143 2144 2145 2146 2147 2148 2149 2150 2151 2152 2153 2154 2155 2156 2157 2158 2159 2160 2161 2162 2163 2164 2165 2166 2167 2168 2169 2170 2171 2172 2173 2174 2175 2176 2177 2178 2179 2180 2181 2182 2183 2184 2185 2186 2187 2188 2189 2190 2191 2192 2193 2194 2195 2196 2197 2198 2199 2200 2201 2202 2203 2204 2205 2206 2207 2208 2209 2210 2211 2212 2213 2214 2215 2216 2217 2218 2219 2220 2221 2222 2223 2224 2225 2226 2227 2228 2229 2230 2231 2232 2233 2234 2235 2236 2237 2238 2239 2240 2241 2242 2243 2244 2245 2246 2247 2248 2249 2250 2251 2252 2253 2254 2255 2256 2257 2258 2259 2260 2261 2262 2263 2264 2265 2266 2267 2268 2269 2270 2271 2272 2273 2274 2275 2276 2277 2278 2279 2280 2281 2282 2283 2284 2285 2286 2287 2288 2289 2290 2291 2292 2293 2294 2295 2296 2297 2298 2299 2300 2301 2302 2303 2304 2305 2306 2307 2308 2309 2310 2311 2312 2313 2314 2315 2316 2317 2318 2319 2320 2321 2322 2323 2324 2325 2326 2327 2328 2329 2330 2331 2332 2333 2334 2335 2336 2337 2338 2339 2340 2341 2342 2343 2344 2345 2346 2347 2348

*[Handwritten signature]*

*[Handwritten signature]*

1. *Phragmites australis* (Cav.) Trin. ex Steud.

ولمزيد الاختصار رخصت بغير هذا عقد في اقل من شهرين

بالاخر و ثم ببرهن علی

ووثق أحد العديدين ٢٠٠٠ كان عدد المضاربين للداخلية في الخامس ٢٠٠٠



د بدرجة ثانية أو بدرجة اعلى منها  $\alpha$  على عدد المضارب متممة  
 على د بدرجة ثالثة أو بدرجة اعلى منها وهكذا ، وفرض  $\alpha + \beta + \gamma + \dots = 1$   
 فان الحاصل د يكون قابلاً للقسمة على قوة  
 اعلى من د  $\alpha$  كجيت كان د يخوى بالاقترع مصاريف ثابته للقسم  
 على د المأخوذ بكل قوة يوسدها في الحاصل د فيكون د قابلاً للقسمة  
 على د  $\alpha$  ومثلاً على جميع المضارب الأولية للحاصل د مرفوعة ب  
 قوى مساوية بالاقل للقوى التي ارتفعت اليها هذه المضارب في الحاصل د  
 وجنبد يكون د قابلاً للقسمة على د

ومثل هذا يبرهن على أن الحاصل  $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times m$  يكون قابلاً للقسمة  
 على  $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p \times q \times r \times \dots \times x \times y \times z$   
 بفرض أن  $m = p + q + r + \dots + z + \dots$

### في خواص قسم الأعداد على بعض فواكسها

يبدأ خواص قسم الأعداد على بعض فواكسها ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١١ في الموصحة  
 في كتب الحساب تنحصر فافية عوميه يمكن تطبيقها على جميع الجمل العددية  
 مثلاً اذا فرضنا أن  $11$  كتابة عن عدد صحيح مكروب بالنسبة لجملة تعدادية

تقبل القسمة على ك مساوياً بالأقل بعد المضارب الداخلة في الخاص  
 لانه اذا فرض أن ك > م وجعل م رمزاً للجزء الصحيح من خارج قسمة م  
 على ك كانت مكررات ك المحصورة في الأعداد المبدئية من الواحد في  
 م مساوية لك، ك، ٢ك، ٣ك، ..... م ك

واذا فرض أيضاً أن ك < م وجعل م رمزاً للجزء الصحيح من خارج قسمة  
 م على ك كانت مكررات ك المحصورة في التسلسلة المبدئية من الواحد  
 الى م مساوية لك، ك، ٢ك، ٣ك، ..... م ك

وبالجملة اذا جعل م رمزاً للخارج الصحيح من قسمة م على ك كانت  
 مكررات ك المحصورة بين الأعداد المبدئية من الواحد الى م مساوية  
 لك، ك، ٢ك، ٣ك، ..... م ك وحيث فرض أن  $m = p + q$  م فيكون  

$$\frac{p}{d} + \frac{q}{d} = \frac{m}{d}$$
 وحيث يكون

$$m = p + q \quad \text{أو} \quad m < p + q$$

وحيث فقد ثبت المطلوب

فاذا جعل الآن ح د الأعلى مضروباً أولى ن ل على عدد مضارب  
 د القابلة للقسمة على ح ن ل على عدد المضارب المتتلة على  
 ح

وثالثاً أنه يجوز ~~مشتق~~ من عدة أجزائه أن يكون ~~أجزاء~~ عدد على أي قسم  
مكون من الأساس المرفوع إلى القوة الجمعية فافضة واحداً من الباقي المتحصل  
من ~~قسمته~~ حاصل جمع ~~الأساس~~ القوة الجمعية ~~الأساس~~ من أرقام عددها م  
على هذا القاسم

وثالثاً أنه يلزم أن يكون باقي قسمة عدد على أي قسم  
مكون من الأساس المرفوع إلى القوة الجمعية ذاته ~~أو~~ رافداً عين الباقي المتحصل  
من ~~قسمته~~ قاضٍ حاصل جمع العقود الفردية (التي يتألف كل منها من أرقام  
عددها م) وسائر جميع العقود الزوجية على نفس القاسم المذكور  
وبناءً على ذلك يلزم لكي تكون القسمة الأولية صامتة أن تكون القسمة  
الثانية منتهية

ومتى أريد معرفة قابلية عدد كـ العدد ج للقسمة على عدد آخر كـ العدد  
ج بواسطة القواعد المتقدمة ينبغي أن يبدأ بالبحث عن قوة الأساس  
التي يقسمتها على ج يكون الباقي مساوياً للصفر أو ١ أو -١  
فاذا كان العدد ج لا يحتوي إلا على مضارب أولية للأساس لـ فإنه



(٤٥٠)

لأنه لما كان  $ل^2 - ١ = (ل - ١)(ل + ١)$  لزم أن يكون  $ح$  قاسماً للعدد  
 $ل - ١$  أو  $ل + ١$ ، وحيث لا يكون قاسماً لـ  $١ - ل$  وإنما يكون قاسماً لـ  $١ + ل$   
فاذا فرض مثلاً أن  $ح = ٣٧$  وقسمت القوى المتوالية للعدد ١٠

على ٣٧ كانت القوة الثالثة للعدد ١٠ المذكور التي يتحصل منها باق  
ساو ١٠ + وينتج من ذلك أن قابلية أي عدد للقسمة على ٣٧ تنفوق  
على قابلية قسمة حاصل جمع العقود (التي كل منها مركب من ثلاثة ارقام)  
على ٣٧

واذا فرض أيضاً أن  $ح = ٧$  كانت أصغر قوى العدد ١٠ التي تقسم على ٧  
ليكون الباقي ساوياً ١٠ + هي ١٠٠٠... وعليه فكل عدد يقبل القسمة  
على العدد ٧ يكون له ارتباط بقابلية حاصل جمع العقود (التي كل منها  
مؤلف من ستة ارقام) على العدد ٧، وحيث أن باقي قسمة العدد ١٠٠٠  
على ٧ يساوي ١ - فينتج من ذلك أن أي عدد يكون قابلاً للقسمة  
على ٧ متى كان الفاصل بين حاصل جمع العقود الفردية المرتبة (التي كل  
منها مؤلف من ثلاثة ارقام) وحاصل جمع العقود الزوجية المرتبة  
(التي كل منها مؤلف من ثلاثة ارقام) قابلاً للقسمة على ٧

(٤٤)

يتحصل لهذا الأساس قوة تكون قابلة للقسمة على  $\mathfrak{g}$  وحينئذ يجب أن  
تطبق القاعدة الأولى على ذلك

وإذا كان العدد  $\mathfrak{g}$  أولياً مع الأساس  $\mathfrak{L}$  فإنه يبرهن على أنه يوجد  
لهذا الأساس قوة إذا نقصت عن أصلها واحداً كان الباقي قابلاً للقسمة على  
 $\mathfrak{g}$  لأنه إذا قسمت القوى المتوالية  $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}^2, \mathfrak{L}^3, \dots, \mathfrak{L}^{\mathfrak{g}-1}$  للأساس  $\mathfrak{L}$   
على العدد  $\mathfrak{g}$  تحصل من ذلك بواقة عدد  $\mathfrak{h}$  يكون كل واحد منها  
دون هذا العدد ولا يكون معدوماً لأن  $\mathfrak{g}$  أولى مع الأساس  $\mathfrak{L}$   
وبئخذ من هذا أنه لو تحصل من ذلك باقياً متساوياً وانما لتحصلت  
المساويتان  $\mathfrak{L}^{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{L}^{\mathfrak{g}-1} = \mathfrak{L}^{\mathfrak{g}-1} + \mathfrak{L}^{\mathfrak{g}-2} + \dots + \mathfrak{L} + \mathfrak{L}^0$  (بفرض أن  $\mathfrak{g} + \mathfrak{L}^0$   
يكون دالاً على عدد دون  $\mathfrak{g}$ ) اللتان يستنتج منهما أن  $\mathfrak{L}^{\mathfrak{g}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{L}}$   
 $= (\mathfrak{L}^{\mathfrak{g}} - 1)$  وعليه فيكون  $\mathfrak{g}$  قاسماً للحاصل  $\mathfrak{L}^{\mathfrak{g}} - 1$  (لأن  $\mathfrak{L}^{\mathfrak{g}} - 1$  حيث  
أن  $\mathfrak{g}$  أولى مع كل من  $\mathfrak{L}$  و  $\mathfrak{L}^{\mathfrak{g}} - 1$  فيكون قاسماً لـ  $\mathfrak{L}^{\mathfrak{g}} - 1$ ).

وإذا فرض أن  $\mathfrak{g}$  عدد أولى وأن  $\mathfrak{L}$  كتابة عن أصغر قوة للأساس  $\mathfrak{L}$   
ل بحيث إذا نقصت عن أصلها واحداً كان الباقي قابلاً للقسمة على  $\mathfrak{g}$   
فإن كان العدد  $\mathfrak{m}$  زوجياً ومبنيًا بالرمز  $\mathfrak{m}$  كان  $\mathfrak{g}$  قاسماً لـ  $\mathfrak{L}^{\mathfrak{m}}$





في جبر الكميات المتعدية

بأن الجذر الذي له صيغة  $\sqrt[n]{a}$  لا يكون له قوة  $a$  إلا إذا كان  $n$  يقسم  $a$  تماماً  
 ولبرهنة على ذلك نعلم أن  $\sqrt[n]{a}$  لا يمكن أن يكون له قوة  $a$  إلا إذا كان  $n$  يقسم  $a$  تماماً  
 لو فرض أن الجذر  $\sqrt[n]{a}$  له قوة  $a$  فإن  $a$  يساوي  $\sqrt[n]{a}$  مرفوعاً إلى  $n$  وهو  $a$   
 يفرض أنه مبرهن في الاختصار كان  $\sqrt[n]{a}$  وحيث يلزم أن يكون  
 $a$  قابلاً للتقسيم على  $\sqrt[n]{a}$  فلا كان  $a$  أولياً مع  $\sqrt[n]{a}$   
 $a$  كذلك لأنه إذا فرض أن  $a$  مضروباً في  $\sqrt[n]{a}$  أو  $a$  مرفوعاً إلى  $n$   
 من  $a$  كان هذا المضروب الأولي قابلاً للتقسيم على  $\sqrt[n]{a}$  وهو متعين  
 لا يكون الكسر  $\frac{a}{\sqrt[n]{a}}$  مساوياً لعدد صحيح وبذلك نكون الغرض المقصود  
 قاسداً

### النظرية الثانية

بأنه لكي يكون الجذر المسمى  $\sqrt[n]{a}$  كسر غير قابل للاختصار منطقياً يلزم أن يكون حده  
 مركب من قوة صحيحة درجتها  $m$  فإذا رز لهذا الكسر بالرمز  $\frac{p}{q}$  وكان  
 جذره المسمى ببساطة الكسر  $\frac{p}{q}$  الذي يفرض غير قابل للاختصار كان  
 $\frac{p}{q} = \frac{a}{\sqrt[n]{a}}$  وحيث أن الكسر  $\frac{p}{q}$  غير قابل للاختصار فيكون الكسر  
 $\frac{p}{q}$





سبعة قد سبقنا في ترتيبها من الجذور الأولى إلى الأخيرة في هذا الباب  
 مسوقاً بعمليتها في معرفة أعمق الجذور من الجذور الأولى  
 على أن الجذر الثاني يكون له مقادير سبعة من الجذور الأولى  
 الجذر الثالث للعدد ٨ فهو له مقادير ثمانية من الجذور الأولى  
 الجذر المطلوب بالرمز ٨ وللعهد المعلوم بالرمز ٨  
 س - ح = ٨. وقد تقدم أن س - ح يقبل عشرة من الجذور الأولى  
 فإذا احترت قيمة القسمة تخصصت معادلة س - ح من الجذور الأولى  
 التي لا تحقق إلا بعض أحد المقادير بين (س - ح) أو (س - ح) أو (س - ح)  
 يساوي صفراً ومن هنا تخرج دلالة مقادير الجذر الثاني من الجذور الأولى  
 يبرهن على أن الجذر الرابع له أربعة مقادير والجذر الخامس له خمسة  
 وهكذا وعليه فيكون للجذر سبعة مقادير من الجذور الأولى  
 في جمع الجذور في هذه الجذور الخمسة  
 سبعة ما تقدم (في خمسة من الجذور الأولى) بخلاف من سبعة من الجذور الأولى  
 المنطقة ذات الدرجة الثانية والثالثة فيكون أعلى حد من  
 غير المنطقة التي من أي درجة بحيث أنه قد سبق أيضاً تعريف الجذور

هو حاصل ضرب تركيب من جهة مضارب كل منها ما يؤخذ في الجذر  
وعليه فالقوة البيمية ثمانية تاوي حاصل ضرب مركب من مضارب  
عددها م كل منها ما يؤخذ في الجذر ويلمزم بمقتضى قاعدة ضرب  
الجذور لتكون القوة البيمية لحد أن يرفع مكرور الى القوة البيمية ونضرب  
أس كل من حروفه في م

وينتج ما تقدم أنه يلزم لايجاد الجذر البيمى لحد أن يؤخذ الجذر البيمى لكرره  
ونقسم أس كل من حروفه على م مثلاً الجذر الثالث للحد  $٦٤٦٢٧$   
هو  $٤٦٢٧$  والجذر الخامس للحد  $٣٢٨٠٠٠٠٠$  هو  $٤٠٠٠٠$  ونجد  
يلزم لاستخراج الجذر البيمى لحد أن يكون مكرور الرقى قوة صحيحة درجتها م  
وأن تكون أس كل من حروفه قابلة للقسمة على م فان كان أحد هذين  
الشرطين غير محقق كان الجذر البيمى للحد غير منطبق ويستدل عليه بوضعه تحت  
علامة آخر ويطلق على العدد م المكتوب بين شعبتي هذه العلامة  
اسم دليل الجسدر و بمقتضى قاعدة ضرب الكور يلزم لايجاد القوة  
البيمية لكره أن يرفع كل من حديه الى القوة م وعليه فيستخرج الجذر  
البيمى لكره بأخذ الجذر البيمى لكل من حديه

(٤٥٨)

ثم حيث انه يبرهن بمثل ما تقدم في ضرب الجذور على نسبتها فيكون

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

وينتج ما تقدم في الضرب والنسبة أنه يمكن ادخال مضروب تحت علامة الجذر بضرب اسمه في دليل الجذر واخراجه من تحتها بقسمة اسمه على دليل الجذر مثلاً

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

وبمثل ذلك يتحصل

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

وهذا هو المعروف بقاعدة اخراج المضروب من تحت علامة الجذر

المشابهة وغير المتشابهة فلندكر هنا الآ العمليات التي يقتضى أن  
تجرى عليها فنقول —

فی جمع یحذو المتشابهة وطرهما

اذا تريد إيجاد حاصل جمع  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}}$

وإذا أردت إيجاد باقي طرح ١٠ أس ٢ - ٣ أس ٢

وإذا اريد إيجاد  $n$   $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1}$  وهذا غير صحيح

قاضي الجند والمختار

۱۵۹ بلزم لتكوين حاصل ضرب جملة جذور مستقيمة على الاعداد التي تضمنت الكميات

الموضوعة تحت كل علامة جذرية في هذا الكتاب

واحدة بين شعبتيها دليل الجذر واحد

بسم الله الرحمن الرحيم

$$x \in \mathbb{R}^n \text{ is a vector}$$
$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

10

۱۰۰



بکذا و غیره ... در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند  
 و در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند

مثلاً در این جدول ... در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند  
 و در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند  
 و در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند  
 و در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند  
 و در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند

و این جدول ... در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند  
 و در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند  
 و در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند  
 و در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند  
 و در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند

و در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند  
 و در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند  
 و در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند  
 و در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند  
 و در هر یک از این درجه ها یک مرتبه از یکدیگر جدا شده اند

...  
 ...  
 ...  
 ...  
 ...

...  
 ...  
 ...  
 ...  
 ...  
 ...  
 ...

...  
 ...  
 ...



(٤٦)

$$\sqrt[6]{A} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{A}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{A}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{A}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{A}} = \sqrt[6]{A}$$

وبمثل هذا يتحصل

$$\sqrt[6]{A} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{A}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{A}} = \sqrt[6]{A}$$

بند ١٩٠ يلزم لرفع جذر غير منطوق إلى أى قوة أن ترفع البكّة التي تحت علامته

الدرجة هذه القوة مثلاً إذا اردت رفع  $\sqrt[3]{A}$  إلى القوة التي درجتها

٣ فهو أنه يتحصل  $(\sqrt[3]{A})^3 = A$  لان

$$(\sqrt[3]{A})^3 = \sqrt[3]{A} \times \sqrt[3]{A} \times \sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{A \times A \times A} = \sqrt[3]{A^3} = A$$

ومفومان دليل الجذر قابلاً للنسبة على درجة القوة التي يُراد رفع

ما تحت العلامة إليها الجرى العمل بهذه المثابة وهي أن يقسم العدد

الأول على الثاني فيجاء

$$(\sqrt[3]{A})^3 = \sqrt[3]{A}^3 = A$$

بند ١٩١ الجذر المسمى بكّة غير منطوقة يتحصل بضرب دليلها في درجة الجذر المسمى

التي

(٤٦٤)

وجنبذ يؤخذ من هذه السابج المختلفة ان القواعد المنسوبة للأشـ  
لكسرية لا تختلف عن القواعد المتعلقة بالأشـ الصحيحة

١٦٣ سند قد تقدم في الأساس السالبة انه متى كان الأساس سالباً أمكن أخذ  
المقدار  $\frac{1}{a}$  بدل  $a$  وذلك لا يختلف في الأساس لكسرية بمعنى

$$\text{أن } \frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} \text{ لأن}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} .$$

في الأساس السالبة

١٦٤ سند خواص الأساس توصل الى نظرية ضرورية لحل جملة مسائل وكيفية  
الاستعمال في اثبات العددية

وجنبذ يترجم ان يبرهن على ان جميع الاعداد تنح من فوق  
عدد ثابت موجب اكبر من الواحد العدد رمز بان من  $a$  بعدد ثابت  
موجب اكبر من الواحد وكونت لغوي المتواليه  $a, a^2, a^3, \dots$   
حدث من ذلك جملة اعداد لا تنح اذ في الازدياد وعبارة

(٤٦٢)

على م فان كانت القسمة ممكنة وجعل في رمز الحاج القسمة كانا الجذر  
 النوفالكية  $\frac{8}{2}$  مينا هكذا  $\frac{8}{2}$  وان كانت القسمة غير ممكنة أمكن  
 نايكون الجذر غير المنطق  $\frac{8}{2}$  مينا هكذا  $\frac{8}{2}$

القواعد التي يلزم تطبيقها على الأسس الكسرية تؤخذ من القواعد المقررة  
 في شأن الجذور غير المنطقة مثلاً اذا اعتبر الآن احوال الضرب والقسمة  
 وتكوين القوى واستخراج الجذور شوهد أن

$$\frac{8}{2} \times \frac{8}{2} = \frac{8 \times 8}{2 \times 2} = \frac{64}{4} = 16$$

$$\frac{8}{2} : \frac{8}{2} = \frac{8}{2} \div \frac{8}{2} = \frac{8}{2} \times \frac{2}{8} = \frac{16}{16} = 1$$

$$\sqrt[8]{\frac{8}{2}} = \sqrt[8]{\frac{8}{2}} = \sqrt[8]{\frac{8}{2}} = \sqrt[8]{\frac{8}{2}} = \sqrt[8]{\frac{8}{2}}$$

بكتبة متوالية بالابتداء من الصفر الى  $\infty$  اخذ من جميع المقادير من الواحد

الى  $\infty$

واذا فرض للمتغير  $x$  مقادير سالبة بأن كان  $x = -1$  أي آت المعادلة المتقدمة

$$x = -1 = \frac{1}{-1}$$

فإذا فرض أن  $x$  يأخذ مقادير من ابتداء الصفر الى  $\infty$  فإن  $\frac{1}{x}$  يأخذ مقادير

من ابتداء الواحد الى  $\infty$  وجنبا يكون للمتغير  $\frac{1}{x}$  مقادير من ابتداء الواحد

الى  $\frac{1}{\infty}$  او الى الصفر

ولنفرض الآن أن  $x$  يكون دائما على عدد دون الواحد مابين  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{3}$

(نفرض  $x$  عددا أكبر من الواحد) فتكون المعادلة

$$x = \frac{1}{2} \text{ الى } x = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{1} \text{ الى } \frac{3}{1}$$

واذا اخذ من جميع المقادير من ابتداء الواحد الى  $\infty$  اخذ من جميع

الأعداد من الواحد الى  $\infty$  وعليه فتكون جميع مقادير  $x$  محصورة

بين الواحد والصفر وإذا فرض للمتغير  $x$  مقادير من ابتداء تسري الى  $\infty$

أخذ من جميع المقادير المحصورة بين الواحد والصفر وعليه يكون

للمتغير  $x$  جميع الأعداد من ابتداء الواحد الى  $\infty$

فاذا فرض كسر حيمًا اتفق كالكسر  $\frac{م}{م}$  الذي يكون حده  $م$  م داليز على عدد دين  
 صحيحين موجبين كان المقدار  $\frac{م}{م}$  اكبر من الواحد لانه يكافئ  $\frac{م}{م}$  وحيث  
 أن العدد  $م$  اكبر من الواحد فيكون  $\frac{م}{م}$  اكبر من الواحد وعليه فيكون  
 المقدار  $\frac{م}{م}$  دالًا على عدد اكبر من الواحد ويكون أيضًا المقدار  $\frac{م}{م}$  آمنًا  
 في الكبر كما كبر الأس لانه اذا رمز بالرمزين  $م$  و  $د$  لأثنين موجبين  
 حينما اتفق حدث  $\frac{م}{د} = \frac{م}{د} \times \frac{د}{د}$  وحيث أن  $\frac{م}{د}$  اكبر من الواحد  
 فيكون حاصل الضرب  $\frac{م}{د} \times \frac{د}{د}$  اكبر من  $\frac{م}{د}$   
 واذا فرض الان أن  $\frac{م}{د} = \frac{م}{د}$  (فرض  $م$  عددًا صحيحًا) كان  
 $\frac{م}{د} - \frac{م}{د} = \frac{م}{د} - \frac{م}{د} = 0$  وحيث شوهده أنه  
 يمكن أن يفرض للعدد  $م$  مقدار كافي بحيث يكون  $\frac{م}{د}$  مختلفًا  
 عن الواحد بقدر ما يراد (كما في بند ١٥١) فيمكن أن يفرض للعدد  $م$  مقدار  
 صغير بحيث يكون الفرق  $\frac{م}{د} - \frac{م}{د}$  صغيرًا بقدر ما يراد  
 ومن هنا يؤخذ انه اذا رمز بالرمزين  $س$  و  $ص$  لكيتين متغيرتين  
 وفرضت المعادلة  $ص = س$  وفرض للمتغير  $س$  جملة مقاييس  
 متقاربة بعضها من بعض بالابتداء من الصفر الى  $ص$  كان  
 للمتغير  $ص$  جملة مقادير متقاربة بعضها من بعض بحيث اذا زاد  $س$   
 بكيفية



$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$

1

توضیحات و ملاحظات

وحيث أن لقول المؤلف: عدد : هي ١٢٨ ... فيكون مقدار

من محصورین ۲، ۳ و علیہ فیکور  $3 = 2 + 1$  واذ وضع حد

المقدار في المعادلة ١٠ = ص عدد صحيح

$$1 = \frac{1}{2} \times 2 \quad \text{ی} \quad 1 = \frac{1}{2} \times 2 \quad \text{و مہاجد}$$

$$c = (1, 0) \text{ أو } (0, 1) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow c$$

واذا كنت أقوى لتوايه بعدد ٥٥. فان بعدد ، محسوزايب

(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2) و  $z = 2 - \frac{1}{r}$  و اذا وضع بدل  $r$

مقدّم في معاداة الأختيرة خمس

٢٥١

SECRET

وعلى ذلك يعرّف من المعادلة الأخيرة أن مقدار  $r$  يكون محصوراً بين

۹. وینیزیکون  $r = a + \frac{b}{r}$  و هم حل



و اما در مورد این که در این کتاب چه چیزها  
در مورد این که در این کتاب چه چیزها

در مورد این که در این کتاب چه چیزها  
در مورد این که در این کتاب چه چیزها  
در مورد این که در این کتاب چه چیزها

در مورد این که در این کتاب چه چیزها  
در مورد این که در این کتاب چه چیزها  
در مورد این که در این کتاب چه چیزها  
در مورد این که در این کتاب چه چیزها  
در مورد این که در این کتاب چه چیزها  
در مورد این که در این کتاب چه چیزها  
در مورد این که در این کتاب چه چیزها  
در مورد این که در این کتاب چه چیزها  
در مورد این که در این کتاب چه چیزها  
در مورد این که در این کتاب چه چیزها

در مورد این که در این کتاب چه چیزها  
در مورد این که در این کتاب چه چیزها

وبناء عليه يكون

$$\frac{\frac{1}{1+3}}{\frac{1}{8+9}} = 5$$

فأذا حبت الآلة الرابعة لهذا الكسر فنحصل  $\frac{58}{43}$  وهو المقدار المقصود

للمجهول  $x$  وهذا المقدار يزيد عن المقصود الحقيقي

غير أن الخطأ يكون فيه أقل من  $\frac{1}{103 \times 43}$  أي من  $\frac{1}{4429}$

وإذا فرض الآن في المعادلة  $x = 5$  أن  $x < 5$  أو  $x > 5$  كان مقدار  $x$

سالباً فإذا جعل  $x = 5$  ص آلت المعادلة المتقدمة إلى

$$x = 5 \text{ أو } x = \frac{1}{5} \text{ ونها يحدث}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{5}$$

وحيث أن  $x$  أقل من الواحد فيكون  $\frac{1}{x}$  أكبر من الواحد وعليه فقد

آنا لأمر إلى الحالة السابقة

وإذا فرض أن  $x < 5$  أو  $x > 5$  كان مقدار  $x$  سالباً أيضاً فإذا جعل

$$x = 5 \text{ أو } x = \frac{1}{5} \text{ ونها يحدث}$$

$$x = \left(\frac{1}{5}\right)$$

وحيث أن

(5, 2)

حيث كان  $\frac{د}{هـ}$  عددًا صحيحًا وبنينا هذا أيضًا أنه ينبغي أن يكون  $د$  مركبًا  
من مضارب أولية واحدة لأن كل مضروب أولى قاسم للعدد  $د$  يقسم  $هـ$   
وسببه فيكون قاسمًا للعدد  $د$  أو  $د$  وبمثل هذا يبرهن على أن كل مضروب  
على العدد  $د$  يقسم العدد  $هـ$

وإذا فرضنا  $د = ح \times ك$  ,  $د = ط \times ز$  (بجعل  $ح$  و  $ز$  كناية عن المضارب

الاولية للعدد  $د$ ) آت المتساوية  $ح \times ز = ط \times ك$  الى

$$\frac{ح}{ط} \times \frac{ز}{ك} = \frac{ح}{ط} \times \frac{ط}{ز}$$

وبما تكون هذه المتساوية حقيقية يلزم أن يكون  $ح = ط$  ,  $م = ك$  و  
وهذان المتساويتان يحدث منهما

$$\frac{ح}{ط} = \frac{ط}{ح} = \frac{م}{ك}$$

وعليه فلكي يكون مقدار  $س$  منطقيًا يلزم أن يكون  $د$  عددًا صحيحًا وأن تكون  
لمضارب الأولية للعدد  $د$  عين المضارب الأولية للعدد  $هـ$  وبتكون  
أسس مضارب العدد  $د$  مناسبة لأسس مضارب العدد  $هـ$

وتكون الشروط كافية لتتبع ما ذكرناه إذا فرضنا  $د = ح \times ط$  ,  $هـ = ز \times ك$

$$د = ح \times ط \times ك , \frac{ح}{ط} = \frac{ط}{ح} = \frac{م}{ك} \text{ نحصل}$$

أولاً أن لو غارت تم حاصل ضرب يكون مساوياً لمجموع لو غارت فان مضارب  
وثانياً أن لو غارت تم خارج قسمة عدد من يكون مساوياً للو غارت تم المقسوم عليه

منه لو غارت تم المقسوم عليه

وثالثاً أن لو غارت تم أي قوة لا يمدد يكون مساوياً للو غارت تم هذا العدد

مضروباً في درجة القوة المذكورة

ورابعاً أن لو غارت تم جذراً أي عدد يكون مساوياً للو غارت تم هذا العدد

مقسوماً على درجة الجذر المذكور

ويؤخذ من القاعدة الثانية أن لو غارت تم أي كسر يكون مساوياً للو غارت تم

بسطه مطروحاً منه لو غارت تم مقامه وينتج من القاعدتين الأولى أن

لو غارت تم الحد الرابع من متسلسلة يكون مساوياً لمجموع لو غارت تم الواسطين

مطروحاً منه لو غارت تم الحد الأول

هذه متى تكونت جملة لو غارت قسمة سوا لا تقال منها إلى جملة أخرى لانه اذا

قسم بالوزن في الاساس اجملة الاولى وبالوزن في الاساس اجملة الثانية

المنسوبة لو غارت تم أي عدد كما هدد م بالنسبة للجملة التي اساسها و





[illegible]

۱۷۴. بنگلہ دیش کے استعمانیوں نے اس وقت کے اریہ سماج سے معاہدہ کیا۔  
مثلاً ادا و رست معاہدہ

انہ سے بیرونی سبب انقضی و التقدیم (فی الجہ) مرید ہو

نادا اريد من المادفة حرق = عمر

ہوئی ان کے پاس سے انکو چھوڑ دیا اور وہ لوگ واپس چلے گئے۔

لذلك نأخذ من كل مجموعة من المجموعات التي أساسها  $\mathcal{A}$  نحصل

عن طريق  $\mathcal{A}$  من مجموعها  $\mathcal{A}$  من مجموعها  $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}}$$

ومن هذا نرى أن مجموع المجموعات التي أساسها  $\mathcal{A}$  بالنسبة للأساس

في  $\mathcal{A}$  من مجموعها  $\mathcal{A}$  من مجموعها  $\mathcal{A}$  من مجموعها  $\mathcal{A}$

في  $\mathcal{A}$  من مجموعها  $\mathcal{A}$  من مجموعها  $\mathcal{A}$  من مجموعها  $\mathcal{A}$

بالنسبة للأساس  $\mathcal{A}$

ويطلق على خارج قيمة  $\frac{1}{\mathcal{A}}$  اسم قياس الأساس  $\mathcal{A}$  بالنسبة للأساس  $\mathcal{A}$

نأخذ من تعريف اللوغاريتمات وما تقدم (في  $\mathcal{A}$ )

أولاً أن الأساس  $\mathcal{A}$  في حصة نوغاريتمية يكون مساوياً للواحد ويكون

نوغاريتم الواحد مساوياً للصفر

وثانياً إذا كان الأساس أكبر من الواحد كانت نوغاريتمات الأعداد المنتمية

عن الواحد موجبة ونوغاريتمات الأعداد التي دون الواحد سالبة ونو

الصفر -

وإنما

محاذاً بالمبدأ من المتوالية التي سبقتها في حدود المتوالية العودية  
اسم لو غارتم الحد المحاذي له من المتوالية مقدساً

واللو غارتمات المكونة بهذه المثابة هي أسس لقوى التي يرفع اليها عدد ثابت  
فتكون من ذلك الأعداد التي تكون لها هذه اللوغارتمات لانه اذا مرز  
بالمرز لك لكية ثابتة يمكن اعتبارها مقربة من الواحد بكمية صغيرة جداً

وفرضت المتوالية

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \dots$$

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \dots$$

$$\text{فيجعل } m = 1 \text{ ان } k = 1 \text{ بعد ذلك}$$

$$k = 2 = 3 = 4 = \dots$$

وجميع الكتب المتوالية الهندسية هكذا

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \dots$$

ومن هنا يشاهد ان حدود هذه متوالية هي مقادير مستقيمة من النتيجة

من فرض المعادلة  $m = 1$  واما مقادير مستقيمة فانها تتغير

بواسطة الحدود المختلفة من متوالية الهندسية

(٤٧٧)

أن  $ص = لو$  فاذا وضع مقدار  $ص$  في المعادلة  $ص = ص$  حدث

$$ص = \frac{لو(لو) - (لو)لو}{لو}$$

$$واذا اريد حل المعادلة  $ص^{٤+٣} - \frac{٣}{١-٣} = هـ$$$

يفرض أن  $ص = ح$  فيكون  $ح^{٤+٣} - \frac{ح^{٤}}{٣} = هـ$  أي  $ح^{٣} - ح^{٤} = هـ$

وهذه المعادلة الأخيرة يعلم منها مقدار المجهول  $ح$  فاذا كان لهذا المجهول

مقدار موجب تحصل مقدار  $ص$  المطابق له بوضع هذا المقدار الموجب

بدل  $ح$  في المعادلة  $ص = ح$

قد ذكر في علم الحساب أن نظرية اللوغارتمات ناتجة من نظرية المتواليات

ونوضح ذلك فنقول —

اذا فرضت متوالية هندسية حدها الأول ١ وأساسها  $ك$  تختلف عن

الواحد بقليل وحدودها تأخذ في الازدياد بمقادير صغيرة جداً بحيث تكاد تذكر

بشرط أن تكون هذه المتوالية محتوية على جميع الاعداد وفرضت أيضاً

متوالية عددية حدها الأول صفر وأساسها  $ك$  صغيرة جداً باعتبار

أن هاتين المتواليتين مكتوبتان على وجه بحيث تكون حدود المتوالية

الثانية موضوعة تحت حدود المتوالية الاولى ويكون صفر المتوالية العددية

مما ذيا

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 84

*[Faint handwritten notes at the bottom of the page]*

[illegible]

*(Signature)*

والله اعلم  
بما في صدوركم

۱۰۰

$$1.49041 \times 10^{-1}$$

7-99-2

وهذا النوع من التحويلات

- الأول من عيون : في هذا السار روبر  
وإذ قد تم في عام ١٩٤٤ من قبل

نیزم مفتوح و غارتہ سبب ساجیکہ فرستد

ان بجري على اجزاء الامتداد من اللوحات ثم اسكن بهي مية في حالة ساجنة

٢٧٩٦  
 في اللوغارتمات التي ليس لها ١٠  
 واستعمال الجداول اللوغاريتمية

نبدأ بمثل اللوغارتمات الأعداد ١٠، ١٠٠، ١٠٠٠، الخ فهي ٣، ٤، ٥، ..... الخ  
 ومثل اللوغارتمات الأعداد التي ليست من القوى الصحيحة للعدد ١٠ فلا يمكن  
 بيانها إلا بوجه التقريب (كافي ١٦٦) وهذه اللوغارتمات التقريبية تتعين  
 : سدا عشاري وأما الجزء الصحيح للوغارتم عدد أكبر من الواحد فإنه يحتوي  
 على عدة من الأحاد مساوية لعدد أرقام هذا الجزء ناقصة واحداً لأنه  
 إذا زاد من عدد أرقام الجزء الصحيح بالرمز ٢ كان محصوراً بين ١٠<sup>١</sup> و ١٠<sup>٢</sup>  
 وسأعلى ذلك يكون لوغارتمه محصوراً بين ٢ - ١ و ٣ - ٢ وجنّذ يكون  
 مركباً من أحاد عددها ٢ - ١ ومن جزء عشاري أقل من الواحد ولذا

أطلق على الجزء الصحيح من كل لوغارتم اسم العدد اليساني  
 ١٧ هـ حيث أن الجداول اللوغارتمية لا تحتوي إلا على لوغارتمات الأعداد الصحيحة  
 فلنزم لايجاد لوغارتم كسر أن تطبق عليه القاعدة المنقمة (في سـ ١٦٨)  
 ومتى كان الكسر المفروض أقل من الواحد أمكن تعيين لوغارتمه السالب على  
 وجه بحيث يكون جزءه العشاري موجباً ولذا لنزم أن يضاف بالاختيار  
 للوغارتم

خارج فتم عليه يكون مساوياً للوغا تم هذا العدد مضاداً ليد ومضاداً منه

ثم بقدر درجة القوة الصحيحة للعدد ١٠

ويؤخذ من ذلك أن لو غار تم العدد الاشاري الذي يريد عن الواحد وبوغارة  
العدد الاشاري الذي ينقص عن الواحد ويكون عدده البياي سائياً يتخذ  
في الجبر الاشاري الذي هو لو غار تم العدد الصحيح الى **ك** ونقطع

عن الشرطة

وحينئذ يسهل معرفة العدد البياي للوغا تم عدد اعشاري أصغر من لو  
لانه اذا رمز بالرمز ج لعدد الأصغار الواقعة بين الشرطة واول رقم  
معنوي يوجد عن ثمينها كان العدد المعروض أصغر من  $\frac{1}{10}$  واكبر من  $\frac{1}{100}$   
وحينئذ يكون لو غار تم هذا العدد محصوراً بين - ج - (٨+١) اعني  
أن هذا اللوغا تم يكون مساوياً - (ج+٨) مضاداً اليه جزء اعشاري  
موجب أو أنه يكون مساوياً - ج - مضاداً اليه جزء اعشاري - ايسر

هـ هـ

وتنبيه: لو كان العدد اعشاري معيناً وسدس  
كان عدده البياي مساوياً للعدد اعشاري وهو غير يسدس

(٤١)

ويضاف الى عدده البيا في واحد لانت

$$٠,٤٣٤٦٨٩٩ - ٠,٤٣٤٦٨٩٩ = -٠,٤٣٤٦٨٩٩ + ١ = ٠,٥٦٥٣١٠١$$

$$٠,٥٦٥٣١٠١ =$$

واذا اريد ضرب اللوفارتم  $٠,٥٦٥٣١٠١$  في عدد صحيح كالعدد ٤ مثلاً  
فان حاصل الضرب يكتب هكذا

$$٠,٥٦٥٣١٠١ \times ٤ = ٢,٢٦١٢٤٠٤ \text{ أو } ٢,٢٦١٢٤٠٤$$

ومتى كان لوغارتم مكوناً من عدديا في سالب، وجزء اعشاري موجب واريـد

قسمة على عدد صحيح لزم أن يؤخذ خارج قسمة العدد البيا في على وجه بحيث

يكون الباقي موجباً مثلاً اذا قسم  $٠,٣٤٩٥٦٤$  على ٣ كان خارج قسمة

-٧ على ٣ هو -٢ والباقي ١ - أو خارج القسمة -٣ والباقي ٤

ويتوالى العمل هكذا ايحدث  $٠,٧٧٦٥٤١٤$  وهو الناتج المطلوب

١٢٦ يتخذ من القواعد المتقدمة (في سيند) أن

$$\text{لو} (٨ \times ١٠) = \text{لو} ٨ + \text{لو} ١٠ = ٠,٩٠٣٠٩ + ٠ = ٠,٩٠٣٠٩$$

$$\text{لو} \left( \frac{٧}{١٠} \right) = \text{لو} ٧ - \text{لو} ١٠ = ٠,٨٤٥٠٩ - ٠ = ٠,٨٤٥٠٩$$

ومن هذا ينتج أن لوغارتم حاصل ضرب عدد في القوة الصحيحة للعدد ١٠ أو

خارج



فإذا كان لو غارتم العدد الصحيح يزيد عن كبر الأعداد التي توجد به بعد أو فإنه  
 يلزم أن ينقص عن يمين هذا العدد بالشرط عدة من الأرقام بحيث يكون  
 الباقي أكبر عدد يوجد بين نهايتي العدد ورجله يكون هذا العدد  
 نهاية عن اعشاري صحيح إذا من جزئه الصحيح بالرمز  $\delta$  وجزئه لاعتبار  
 بالرمز  $\epsilon$  وللجزء الاعشاري من لو غارتم العدد  $\delta$  بالرمز  $\epsilon$  بالرمز  $\delta$   
 للفرق الكائن بين لو غارتم العدد  $\delta$  بالرمز  $\epsilon$  بالرمز  $\delta$  بالرمز  $\epsilon$  بالرمز  $\delta$   
 حدثت النسبة

$$\delta : \epsilon :: \delta : \epsilon$$

التي يؤخذ منها أن  $\delta = \epsilon$

فيستغنى أن يضم مقدار  $\delta$  إلى  $\epsilon$  ليكون من ذلك جزء الاعشاري لعدد  
 العدد  $\delta + \epsilon$  الذي هو جزء الاعشاري من لو غارتم العدد الصحيح معلوم  
 وأما عدده البياني فيتعين بالكيفية المتقدمة  
 ومتى كان العدد المفروض عدد اعشاري أكبر من واحد أو أصغر منه كان عدده  
 البياني معلوما دائما وحيث أن جزء الاعشاري لا يتغير إذا قطع النظر عن  
 في ذلك العدد المفروض فيتعين لو غارتمه بالكيفية السابقة

### شريطة في العدد المفروض

وأيضاً متى كان اللوغارتم سالباً بالكلية كان عدده اليبا في أقل بواحد من العدد  
 الدال على مرتبة أول رقم معنوي يوجد عن يمين الشرطة في العدد المفروض  
 وعلى ذلك يكون العدد اليبا في الموجب أو السالب للوغارتم ذالاً على مرتبة  
 أعظم أعاد العدد الذي ينب إليه هذا اللوغارتم  
 ينطبق اللوغارتمات على العمليات العددية بواسطة الجداول ليتوقف على حل  
 مَسْئَلَتَيْنِ

(الأولى) المعلوم عدد والمراد إيجاد لوغارتمه

(والثانية) المعلوم لوغارتم عدد والمراد إيجاد هذا العدد

تنبه: يكفي لحل المسئلة الأولى، إذ نذكر الجداول المستعملة في ذلك فنقول  
 جداول لاكتد وجداول رينو وماري تحتوي على لوغارتمات الأعداد  
 الصحيحة من ابتداء الواحد إلى ١٠٠٠٠ وأما جداول كاليه فانها تحتوي على  
 لوغارتمات هذه الأعداد من ابتداء الواحد إلى ١٠٨٠٠٠ غير أنه لا يوجبها  
 عدد يبا في لكونه سهل إيجاد (نمقتضى سند) من أول وهلة

فإذا كان





(٤٨٨)  
 من جهة الشمال ارتفاع النخلة الأولى فيقول الى ٦٦٩، ١٤٥١٨، وحينئذ يري  
 أن لو غارت ثم الجزء ١٤٥١٨ هو ٦٨-٦٩١٦٩٠. وجدول الفروق الأعظم  
 قبا منه هو الجدول المحتوي على ٢٦٩. وفي هذا الجدول يري أن الأعداد  
 المطابقة للأعداد ٦٨، ٦٩، ١٤٥١٨، ١٤٥١٩، ١٤٥٢٠ هي  
 التي يؤخذ منها أن

$$٢٦٩ \times ٤٩٩ = ١٣٥٩٩٠ + ١٦٩ = ١٣٦١٥٩ = ١٤٥١٨ + ١٦٩$$

وحيث يتحصل للوغارتم المطلوب بهذه الكمية وهي رتبة في الآحاد  
 الأخيرة من لو غارتم العدد ١٤٥١٨ الأعداد ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠  
 وطريقة الحساب هي

$$\begin{array}{r} ١٤٥١٨ \\ ٢٦٩ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ١٤٥١٨ \\ ٢٦٩ \end{array} \quad \begin{array}{r} ١٤٥١٨ \\ ٢٦٩ \end{array} \quad \begin{array}{r} ١٤٥١٨ \\ ٢٦٩ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ١٤٥١٨ \\ ٢٦٩ \end{array} \quad \begin{array}{r} ١٤٥١٨ \\ ٢٦٩ \end{array} \quad \begin{array}{r} ١٤٥١٨ \\ ٢٦٩ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ١٤٥١٨ \\ ٢٦٩ \end{array} \quad \begin{array}{r} ١٤٥١٨ \\ ٢٦٩ \end{array} \quad \begin{array}{r} ١٤٥١٨ \\ ٢٦٩ \end{array}$$

فإذا اريد الآن معرفة العدد الذي لو غارتم معلوم ووص أن الجزء الأشار  
 لهذا اللوغارتم هو ٦٨-٦٩١٦٩٠ فإنه يبحث بين لو غارتمات أعداد الأرقام

(٤٨٧)

مثلاً اذا اريد معرفة لوغار تم العدد ٤٧٧٩٦٠١٣٦ يبحث في الصف ٢ عن  
العدد ٤٧٧٩ وعلم استقامة الصف الا فقي المحتوى على هذا العدد  
الى الصف المبين بالعدد ٦ نرى فيه الارقام الاخيرة للوغار تم المطلوب  
ولتعيين ارقامه الأول يؤخذ العدد المنزل الاكثر قرباً منه بالصعود  
الى الصف المبين بالصفر فيجد د باعتبار العدد البيا في

$$٤٧٧٩٨ = ٤٤٤٠١٣٦$$

والفرق بين لوغار تم عدد د صحيحين متواليين يوجد في الصف الأخير (من  
جهة اليمين) المبين بالرمز (فرق) المكتوب في رأس الجدول الصغير الأكثر  
قرباً من هذه الاعداد لكنه يلاحظ أن هذا الفرق يدل على آحاد من المرتبة  
الأخيرة وتؤخذ من الجدول النسبي الكائن تحت الصف المذكور حواصل ضرب

هذا الفرق في ١٠، ١٠٠، ١٠٠٠، ١٠٠٠٠، ١٠٠٠٠٠، ١٠٠٠٠٠٠، ١٠٠٠٠٠٠٠، ١٠٠٠٠٠٠٠٠

ومن هنا ينتج بالسهولة حاصل ضرب هذا الفرق في أي كسر اعشاري وجيء  
يمكن بواسطة هذا الجدول الاستغناء عن اجراء العمليات الناتجة من  
المتاسبة المتقدمة

مثلاً اذا اريد معرفة لوغار تم العدد ١٤٥١٨٤٦٩ لزم ان تفصل عنه

بالشرط

١٧٨  
 سند المتمم الرقى للوغارتم هو العدد الذي اذا اضيف اليه كان الحاصل ١٠ ومنها  
 يؤخذ أن المتمم الرقى للوغارتم يتحصل من طرحه من ١٠ وذلك بطرح اولدقم  
 يوجد عن عشرين من ١٠ وطرح باقي أرقامه من ٩

والمتمم الرقى يستعمل دائماً لاجتناب اللوغارتمات السالبة ولايجاد باقي حاصل  
 جمع مطروحاته عدة لوغارتمات بواسطة عمليات جمع وذلك بأن تؤخذ  
 المتممات الرقية للوغارتمات التي يراد طرحها وتضاف الى اللوغارتمات  
 الاخرى وحيث أنه يشاهد بالسهولة أن حاصل الجمع يزيد عن الحاصل  
 المطلوب عشرات بعدد المتممات الرقية فيلزم لتصل الناتج الحقيقي أن  
 تطرح هذه العشرات من حاصل الجمع وهذه العملية لا تجري إلا على الجزء الصحيح

وحده

امثلة حسابية محلولة باللوغارتم

المثال الاول اذا اريد إيجاد النتيجة المبينة بالمقدار

بحري العرند 
$$553 \times 827 \times 239 =$$

$17 \times 76$

لوغا  $239 = 2.3782979$

لوغا  $827 = 2.9175005$

لوغا  $553 = 2.7427991$

متمم لوغا  $76 = 1.881874$

متمم لوغا  $17 = 0.2304511$

متمم لوغا  $5 = 0.69897$

(٤٨٩)  
 أربعة الكائنة في الصف المبين بالصف من اللوغارتم الاعظم قرباً من اللوغارتم  
 المعلوم بدون أن يزيد عنه ويؤخذ العدد المطابق له وهو ١٤٥١٨ وبالمثل  
 على استقامة الصف الا في المذكور يشاهد العدد الذي يقرب كل القرب  
 من ٩٠٩ المتكون من الارقام الأربعة الأخيرة التي يتركب منها اللوغارتم  
 وهذا العدد هو ٩٠٦٨ الذي يوجد في الصف المبين بالعدد ٨ ويجيء  
 يكون الفرق بين ٩٠٦٨ و ٩٠٩ ٥ هو ١٤١ ثم يبحث في جدول الفروق  
 عن العدد الذي يقرب من ١٤١ ولا يزيد عنه فيرى أنه ١٤٠ وهو المطابق  
 للعدد ٢٠ وحيث أن الفرق بين ١٤٠ و ١٤١ هو ١ فيضرب هذا  
 الأخير في ١٠ ويبحث عن الدية المترب من حاصل الضرب وهو ١٠  
 فيشاهد أنه ٢٠٩ وهو المطابق للعدد ٧ ويتولى العمل هكذا يرى أن  
 العدد المطلوب هو ١٤١٥٨٠٦٧ وذلك بقطع النظر عن مرتبة اعظم  
 في الاتحاد وكيفية وضع العملية هي

|               |                                |
|---------------|--------------------------------|
| لو س = ١٦١٩٠٩ | والمقدار المطابق               |
| ١٤٥١٨ هو      | والمقدار المطابق للباقي الاول  |
| ٠٠٠٠٠ هو      | والمقدار المطابق للباقي الثاني |
| ٠٠٠٠٠ هو      |                                |
| ٠٠٠٠٠ هو      |                                |



(٤٩٤)

نكتبه ببساطة ونأخذ من العدد ٤ مقرباً من اثنين أو ثلاثة أو ثم اثنتا عشرة  
لأن جداءه يكفيه ثم نزيد من الجزيئين الأولين بحوالي ثمان الأعداد  
من ابتداء الواحد إلى ١٠٠ بحسبة بعشرين من الأرقام لأعشارية  
وحيث يتحصن لو غارتم (٤) مقرباً بأقل من واحد من المربعات المتتالية  
ومن هنا يتجلى مقدار مضبوط لعدد المطلوب وحيد يتعسر عليه الكتابة

$$1029945 = 1029945$$

$$19, 6729147$$

$$1829774 \dots \dots \dots = 18$$

رأى في ثمان (٤) إذا ريد حساب المقدار  $\left(\frac{4}{117}\right)^2$  فنحن نعلم

$$3617478 = 10$$

$$198749 = 10$$

$$7410917 = \frac{4}{117}$$

$$10297751 = \frac{4}{117}$$

$$10297751 = 10297751$$

والله وليي في - اللوح ٣ يدل على أن أنظمة مرتبة لأعداد العدد

(٤٩)

عدد مطابق ٩١٩٢٣٩٠ ..... هو ٨٣٠٦٩

باقي أول ..... هو ٣٠

باقي ساق ١ ..... هو ١٠٤

$$٨٣٠٦٩ - ٣٠ = ٨٣٠٦٩$$

وبإجراء عملية حسابية على هذا القدر نجد  $٨٣٠٦٩ \times ٣٣ = ٢٧٤١٢٧٧$

وحينئذ لا يؤخذ من استعمال اللوغارتمات غير الأرقام الستة الأولى

من هذا العدد فإذ لم يستعمل المتمم الرقمي فإنه يلزم أن يستعمل لذلك بدل عملية

الجمع جمعان وطرح واحد

(المثال الثاني) إذا اريد حساب  $٦٩$  بجوى العمل هكذا

$$١٠٣٠٠ - ٣٠ = ١٠٠٧٠$$

$$١٩ \times ٦٩ = ١٣١١$$

$$١٨٤٦٧٥ \dots \dots \dots ٦٩$$

ولما كان يمكن وقوع خطأ في حاصل ضرب  $٦٩ \times ٣٠$  هو بالتقريب في ٣٠

من أحاد المرتبة السابعة وكان الفرق بين أوغارتمى العددين ١٨٤٤٦

من ١٨٤٤٧ هو ٣٦٤ أحاداً من هذه المرتبة أمكن أن يكون مقدار الخطأ

الواقع في العدد المطلوب  $\frac{٣٦}{٣٣}$  من واحد من خامس الأرقام بالابتداء

من المثال ومن هنا يعلم أنهم لم يتحقق غير الأرقام الخمسة الأولى

مقد

بطل

$$r = \frac{p - p_0}{p_0} , \quad k = \frac{p - p_0}{p_0} \quad (١٩٦)$$

وهذه القوانين الأربعة يؤخذ منها كل واحد من جميع المال من منفعة ما لا يبلغ بسنة  
 فلما القانون الأخير فبعمومه المقدار المتعسر عنه  $p$  الذي لا يدفع  
 إلا في المدة  $k$  من السنين لأن المبلغ  $p$  هو الذي يلزم استعماله في هذه  
 المدة ليتحصل في آخرها  $p$  وأما مقدار  $p$  المأخوذ من هذا القانون  
 فهو المبلغ الذي يمكن تحصيله من صرف استعماله في تجر رأس ماله  $p$  ولا يدفع  
 إلا في المدة  $k$  من السنين وأما الفرق  $p - p_0$  وهو المحجوز في صدوق  
 السرف فانه يعرف بالفائدة الداخلة للمبلغ  $p$  وهذه الفائدة هي  
 المساوية لربح المبلغ  $p$  في المدة  $k$  استقبلة التي يدفع فيها المبلغ  $p$   
 وأما الفائدة الخارجة للمبلغ  $p$  التي هي ربح هذا المبلغ في المدة المذكورة  
 فهي  $k \times p$  ، ومن هذا يبين انه لا يتحصل عن المال الذي قدره  $p$  من ربحاً

فيه من الفائدة الخارجة غير  $p(1 - k)$

بـ ويقال للربح مركب اذا كان رب المال لا يأخذ ربح ماله في كل سنة بل  
 يضمه الى الأصل ويتركه بين يدي مقترض مع رأس المال مدة هذا الزمن  
 فيكون رأس المال في آخر السنة الاول

$$p = p_0(1 + r)$$

(٤٩٤)

المطلوب هي مرتبة العشرات فاذا اريد تحصيل الناتج مقرباً من .....  
 فانه يمكن لذلك تحصيل خمسة ارقام وذلك بقطع النظر عن استعمال الباقي  
 المناسبة

المثال الرابع ( اذا اريد حل المعادلة  $(١٤٥ \dots ١٠٠٠٠) = ٨٩٦٠٥$  فالحل  
 العمل يحدث

$$٨٧٠٦٨٨١ = \frac{(٠٠٨٩٦٠٥) \text{ لو}}{(١٠٠٠٠٠٠٠) \text{ لو}} = ٨٧٠٦٨٨١$$

في الرجب البسيط والمركب

١٧٩ اللوغارتمات تستعمل أيضاً في حل المسائل المتعلقة بربح النقود  
 مثلاً اذا جعل  $r$  رمز الربح الغزلك الواحد في السنة الواحدة فيكون  
 ربح في  $t$  في هذه المدة  $١٠٠$  اربوا على ذلك يكون ربح المبلغ  $h$  في  
 السنة الواحدة  $h$  ويكون  $h$  ربحه في مدة صحيحة أو كسرية من  
 السنين مبيناً بالرمز  $k$  هو  $k \times h$  وبالجمله اذا جعل  $h$  رمزاً لما  
 يؤول اليه المبلغ  $h$  في المدة  $k$  من السنين يحدث  
 $h = (١ + k r)$  ومن هنا يؤخذ

(٤٩٦)

الباقي تحت يد المقرض مدة م سنة

$$د (١+r)^{m-1}$$

ويكون المبلغ د في مدة م - ١ سنة

$$د (١+r)^{m-2}$$

ويكون المبلغ هـ في مدة م - ٢ سنة

$$هـ (١+r)^{m-3}$$

وحتى يكون المبلغ الأخير في مدة سنة واحدة

$$ل (١+r)$$

وتباً إلى ذلك يتوصل

$$ج = د (١+r)^{m-1} + د (١+r)^{m-2} + هـ (١+r)^{m-3} + \dots + ل (١+r)$$

فإذا فرضنا أن  $د = هـ = ل = \dots$  فإن الطرف الثاني من هذه

المعادلة يتحول إلى المتوالية الهندسية حدوها الأول  $د (١+r)$  وأساسها

$(١+r)$  ويحذف يحصل (بما تسمى بيند)

$$ج = \frac{د (١+r)^m [1 - (١+r)^{-m}]}{r}$$

والدفعة السنوية هي المبلغ الذي يتكفل بدفعه المقرض في كل سنة

ليستوفي ربا المال رأس ماله بأرباحه في مدة معينة من الزمن فإذا

(٩٥)

ويكون المبلغ  $\delta$  في آخر السنة الثانية

$$\delta = \delta' = \delta'' = \delta''' = \delta^{(1)}(r)$$

ويكون المبلغ  $\delta$  في آخر السنة الثالثة

$$\delta = \delta' = \delta'' = \delta''' = \delta^{(2)}(r)$$

وبالاستمرار هكذا الى سنوات عددها  $m$  يكون المبلغ الأصلي  $\delta$  في آخر السنة  $m$

$$\delta = \delta' = \delta'' = \delta''' = \delta^{(m)}(r)$$

وبنطبق اللوغارتم على هذا القانون نحصل

$$\delta = \delta' + \delta'' + \delta''' + \dots + \delta^{(m)}(r)$$

وجنبذ نحصل بمقتضى هذا القانون واحدة من الكميات الأربع وهي  $\delta, \delta', \delta'', \delta'''$  اذا علمت الثلاث الاخرى منها

نستطيع ان نأخذ المال اضاف في كل سنة الى رأس ماله مبلغاً جديداً لا يتراكم  
تتخلص منه ارباع مركبة الى أن يستولاه من المقرض وجعلت  $\delta$  و  $\delta'$   
ول رموز المبالغ التي يضعها في مبادئ السنة الاولى والثانية والثالثة  
والرابعة ونحوه  $\delta, \delta', \delta'', \delta'''$  فيكون  
المبلغ

(٢٩٨)

$$(ج-٢٢)(ج+١) = ح \text{ التي ينتج منها } (ج+١) = \frac{ج}{ج-٢}$$

ومن هنا يحدث

$$ج = \frac{لو(ج-٢)}{لو(ج+١)}$$

فإذا اردنا المقارنة بين مقادير عدة مبالغ مدفوعة في ازمة مختلفة فانه يلزم ان تكون هذه المبالغ منسوبة الى زمن واحد كما حصل في المسئلة السابقة مثلاً اذا فرض ان صرفاً استلم مبلغاً قدره ح ولزم ان يدفعه بعد مدة من السنين عددها ح فلا يتخلل هذا المصروف يلزم أنه يدفع لرب المبلغ المذكور شيئاً قيمته ح يكون مدفوعاً مدة من السنين عددها ح واذا بحث عما يؤول اليه المبلغان ح و ح بعد انقضاء المدة تحصل

$$\frac{ح}{(ج+١)} \text{ و } \frac{ح}{(ج-٢)}$$

لان المبلغ الاول مثلاً يعتبر كعدا راسي لرأس ما يؤول الى ح بعد عدة سنين عددها ح وينتج من ذلك انه اذا اخذ الفاضل بين الكسرين المذكورين كان هذا الفاضل سواء كان موجباً أو سالباً كتابية (ب) فانه الذي ان اؤيستد في مقابلة الاستبدال واذا فرض ان هذا الفاضل لا يمكن دفعه بعد مدة من السنين قدرها ح فاجعل ح رمزاً

(٤٩٧)

جعل  $\delta$  رمزاً للرأس المال الذي يقتضى دفعه لربه  $\delta$  رمزاً للبليغ الذي يدفع سنوياً في مدة من السنين عددها  $m$  فإنه يمكن أن تعتبر الدفعات التي يدفعها المقرض قبل انقضاء المدة كقرض على رب المال فيكون لمقدارها تعلق بالرمز  $\delta$  الذي من  $\delta$  ابتداء إلى انقضاء المدة المذكورة وجنيد تكون الدفعة الاولى التي استلمها رب المال قبل انقضاء المدة بسنين عددها  $m-1$  مساوية  $\delta(1+r)^{m-1}$  والدفعة الثانية مساوية  $\delta(1+r)^{m-2}$  وهكذا إلى الدفعة الأخيرة المساوية  $\delta$  فقط وقد سبق أن المال المقرض من ربة المدين بالرمز  $\delta$  يكون ربحه مدة  $m$  سنة مساوياً  $\delta(1+r)^m$

وجنيد يحدث

$$\delta(1+r)^m = \delta(1+r)^{m-1} + \delta(1+r)^{m-2} + \dots + \delta$$

وهذه المعادلة تؤول إلى

$$\delta(1+r)^m = \frac{\delta[1 - (1+r)^{-m}]}{r}$$

وهذه المعادلة تؤخذ منها واحدة من الكميات الأربع متى علم منها ثلاث

فأما بين مقدار  $r$  فإنه يتعلق بكل معادلة درجتها  $m$  وأما مقدار

$m$  فإنه يستخرج من المعادلة



من ... ..

... ..

اختلافه ... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

لمقداره بمقدار الاستبدال كان هذا يبلغ بعد المدة ك مساوياً  $(n+1)^{\frac{1}{2}}$

ومكاناً للمجىة

$$\left[ \left( \frac{1}{2(n+1)} \right) - \left( \frac{1}{2(n+1)} \right) \right] = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)}$$

## الباب السابع

في التوافق والترتيب والتبادل وفنية نوتون

١٨٤ التوافق لحروف عددها م أو الحاصل ضربها المختلفة التي كل واحد منها يشتمل على حروف عددها م هي الحاصل لمائة من كتابة هذه الحروف بجوار بعضها على وجه بحيث يكون كل توافق مشتملاً على حروف عددها م من غير أن يتكرر اثنان من هذه التوافق  
١٨٥ التوافق أو الحاصل ضرب المختلفة المركبة من الحروف الأربعة

د د د ه و مشى هـ

د د د ه و

د د د ه و

هـ و

فيشاهد من هنا انه يلزم لتزيك هذه الحاصل المختلفة ان يتكبد الحزن د

نبت وبيان الكيفية التي بها يعلم عدد الترتيب كحروف عددها م أو الحاصل ضربها المركبة من حروف عددها م والبقاء بل كحروف عددها م أو الحاصل المختلف كحروف عددها م كل واحد منها مشتمل على حروف عددها م يقال —

حيث أنه يلزم لتكوين الترتيب كحروف عددها م مثني أن تكتب على التوالي بحوار كل واحد منها الحروف الباقية التي عددها م-١ فيكون عدد الترتيب كحروف عددها م مثني هو م (م-١)

وحيث أنه يلزم لتكوين الترتيب كحروف عددها م ثلاث أن يكتب بحوار كل من ترتيب هذه الحروف شيء كل من الحروف الباقية التي عددها م-٢ فيكون عدد الترتيب كحروف عددها م ثلاث هو م (م-١) (م-٢) لأنه يحدث من كل من ترتيب الحروف المذكورة مثني ترتيب ثلاثية عددها م-٢ وحيث أن عدد الترتيب مثني هو م (م-١) (م-٢) فيكون م (م-١) (م-٢) دالاً على عدد الترتيب ثلاث وبعقده في ما تقدم يكون عدد الترتيب كحروف عددها م رباع هو



ولما جاد عدد التوافق أو الخصائص المختلفة بحروفها م كل واحد منها  
 مشتمل على حروف عددها م ير من لهذا العدد بالرمز د ثم ير من بالرمز ت  
 لعدد ترتيب حروف عددها م أو الخصائص ضربها التي كل واحد منها مشتمل  
 على حروف عددها م ثم بالرمز ن لعدد تاد الحروف عددها م  
 وحيث أنه يرى بالبداهة أنه إذا تكونت التوافق أو الخصائص المختلفة  
 على حروف عددها م في كل واحد منها مشتمل على حروف عددها م فقط  
 لا يشارك في أي حروف عددها م أخرى أو لا يشارك في أي حروف عددها م أخرى  
 من حروف عددها م وذلك بأن نجري على كل من الحروف  
 السابقة سائر التباديل في حروف عددها م وحيث يكون عدد الترتيب  
 مساوياً لعدد التباديل مضروباً في عدد التوافق أي  $n \times d$   
 وهو هنا يساوي  $n \times d$  إذا استعوض كل رمز ت د ب  
 د ت في كل واحد من التوافق أو الخصائص المختلفة  
 فيكون عدد التوافق أو الخصائص المختلفة  $n \times d$   
 فيكون عدد التوافق أو الخصائص المختلفة  $n \times d$   
 لا يكون هناك لبس في هذه القواعد على أن كل واحد من الحروف عددها م  
 لا يكون س ٤ ح عند ما يكون الأمر عند العينة أموجبا لكونه يتوزع

وبناءً عليه يكون عدد تراتيب حروف  $m$  أو عناصر ضربها التوافق  
واحد منها مثل على حروف عددها  $m$  مساوياً على العموم

$$m (m-1) (m-2) (m-3) \dots (m-2) (m-1) [1]$$

فإذا فرض أن  $m=3$  فإن التراتيب فتحول إلى تبادل يكون عددها مساوياً

$$3 (3-1) (3-2) (3-3) \dots (3-2) (3-1) 1 \times 2 \times 3 \dots$$

حدث  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots (3-2) (3-1) (3-3) \dots$  وهذا هو المقدار

المساوي لعدد تبادل حروف عددها  $m$

ويمكن أيضاً تحصيل هذا المقدار الأخير بدون التفات إلى القانون الدال على

عدد التراتيب بأن يقال حيث أنه تحصل من الحرفين  $m$  و  $m-1$  التبادلات

$m$  و  $m-1$  وأنه يمكن تكوين تبادل ثلاثة حروف أن يكتب بعد كل من

هذه الحروف تبادل الحرفين الآخرين فيكون عدد التبادل لحروف

عددها  $3$  هو  $3 \times 2$  وحيث أنه يلزم لتكوين تبادل أربعة حروف

أن يكتب بعد كل من هذه الحروف تبادل الحروف الثلاثة الباقية فيكون عدد

التبادل لهذه الحروف الأربعة هو  $4 \times 3 \times 2$  ويتوالى العمل هكذا إلى

عدد تبادل حروف عددها  $m$  مبنياً باليكية  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots m$

$$\begin{array}{c|c} \text{س} + \text{ح} & \text{س} + \text{ح} = (\text{س} + \text{ح}) \\ \hline \text{س} + \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} \text{س} + \text{ح} + \text{ه} & \text{س} + \text{ح} + \text{ز} & \text{س} + \text{ح} + \text{ز} = (\text{س} + \text{ح}) (\text{س} + \text{ز}) \\ \hline \text{ه} + \text{ح} & \text{س} + \text{ز} & \text{س} + \text{ز} \\ \hline \text{ه} + \text{ز} & \text{ه} + \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} \text{س} + \text{ح} + \text{ه} + \text{ز} & \text{س} + \text{ح} + \text{ز} & \text{س} + \text{ح} + \text{ز} = (\text{س} + \text{ح}) (\text{س} + \text{ز}) (\text{س} + \text{ه}) \\ \hline \text{س} + \text{ز} & \text{ه} + \text{ح} & \text{س} + \text{ز} & \text{س} + \text{ز} \\ \hline \text{ه} + \text{ز} & \text{ه} + \text{ح} & \text{ه} + \text{ز} & \text{ه} + \text{ز} \\ \hline \text{ه} + \text{ز} & \text{ه} + \text{ح} & \text{ه} + \text{ز} & \text{ه} + \text{ز} \\ \hline \text{ه} + \text{ز} & \text{ه} + \text{ح} & \text{ه} + \text{ز} & \text{ه} + \text{ز} \\ \hline \text{ه} + \text{ز} & \text{ه} + \text{ح} & \text{ه} + \text{ز} & \text{ه} + \text{ز} \end{array}$$

وبعد هذه الحواصل الجزئية يشاهد فيها أن الحرفي س يأخذ في ستة

أوضاع بالابتداء من أحد الأول الذي له مبادي بعد

التي أخذت لأجله الذي له معدوم وأن يكون أحد الثاني يكون  
الحدود الثانية في الحركات ذات الحدين وأن يكون أحد الثالث يكون  
لجميع حواصل صواب الحدود الثانية المذكورة متنى وهكذا إلى آخر







بخصوص ما ورد في هذه المذكرة في بعض

وَيُنِىْ جَعَلَ هَذَا الْقَابِلُ لِلْمُتَّكِئِينَ عَلَيْهِ أَنْ يَفْزِعُوا فِي هَذَا الْقَانُونِ مَضْرُودٌ

منه من ضرب كيات من اوت الخدين عدد هـ م (بجعل م رمز العدد  
موجب) كان هذا القانون مطرداً ايضاً في حاصل ضرب كيات من ذوات

1944

مثلاً:  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$  و  $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{1}{10}$  و  $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{7}x - \frac{1}{14}$  و  $\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{1}{18}$  و  $\frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{11}x - \frac{1}{22}$  و  $\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{13}x - \frac{1}{26}$  و  $\frac{1}{14}x^2 + \frac{1}{15}x - \frac{1}{30}$  و  $\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{17}x - \frac{1}{34}$  و  $\frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{19}x - \frac{1}{38}$  و  $\frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{21}x - \frac{1}{42}$  و  $\frac{1}{22}x^2 + \frac{1}{23}x - \frac{1}{46}$  و  $\frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{25}x - \frac{1}{50}$  و  $\frac{1}{26}x^2 + \frac{1}{27}x - \frac{1}{54}$  و  $\frac{1}{28}x^2 + \frac{1}{29}x - \frac{1}{58}$  و  $\frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{31}x - \frac{1}{62}$  و  $\frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{33}x - \frac{1}{66}$  و  $\frac{1}{34}x^2 + \frac{1}{35}x - \frac{1}{70}$  و  $\frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{37}x - \frac{1}{74}$  و  $\frac{1}{38}x^2 + \frac{1}{39}x - \frac{1}{78}$  و  $\frac{1}{40}x^2 + \frac{1}{41}x - \frac{1}{82}$  و  $\frac{1}{42}x^2 + \frac{1}{43}x - \frac{1}{86}$  و  $\frac{1}{44}x^2 + \frac{1}{45}x - \frac{1}{90}$  و  $\frac{1}{46}x^2 + \frac{1}{47}x - \frac{1}{94}$  و  $\frac{1}{48}x^2 + \frac{1}{49}x - \frac{1}{98}$  و  $\frac{1}{50}x^2 + \frac{1}{51}x - \frac{1}{102}$  و  $\frac{1}{52}x^2 + \frac{1}{53}x - \frac{1}{106}$  و  $\frac{1}{54}x^2 + \frac{1}{55}x - \frac{1}{110}$  و  $\frac{1}{56}x^2 + \frac{1}{57}x - \frac{1}{114}$  و  $\frac{1}{58}x^2 + \frac{1}{59}x - \frac{1}{118}$  و  $\frac{1}{60}x^2 + \frac{1}{61}x - \frac{1}{122}$  و  $\frac{1}{62}x^2 + \frac{1}{63}x - \frac{1}{126}$  و  $\frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{65}x - \frac{1}{130}$  و  $\frac{1}{66}x^2 + \frac{1}{67}x - \frac{1}{134}$  و  $\frac{1}{68}x^2 + \frac{1}{69}x - \frac{1}{138}$  و  $\frac{1}{70}x^2 + \frac{1}{71}x - \frac{1}{142}$  و  $\frac{1}{72}x^2 + \frac{1}{73}x - \frac{1}{146}$  و  $\frac{1}{74}x^2 + \frac{1}{75}x - \frac{1}{150}$  و  $\frac{1}{76}x^2 + \frac{1}{77}x - \frac{1}{154}$  و  $\frac{1}{78}x^2 + \frac{1}{79}x - \frac{1}{158}$  و  $\frac{1}{80}x^2 + \frac{1}{81}x - \frac{1}{162}$  و  $\frac{1}{82}x^2 + \frac{1}{83}x - \frac{1}{166}$  و  $\frac{1}{84}x^2 + \frac{1}{85}x - \frac{1}{170}$  و  $\frac{1}{86}x^2 + \frac{1}{87}x - \frac{1}{174}$  و  $\frac{1}{88}x^2 + \frac{1}{89}x - \frac{1}{178}$  و  $\frac{1}{90}x^2 + \frac{1}{91}x - \frac{1}{182}$  و  $\frac{1}{92}x^2 + \frac{1}{93}x - \frac{1}{186}$  و  $\frac{1}{94}x^2 + \frac{1}{95}x - \frac{1}{190}$  و  $\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{97}x - \frac{1}{194}$  و  $\frac{1}{98}x^2 + \frac{1}{99}x - \frac{1}{198}$  و  $\frac{1}{100}x^2 + \frac{1}{101}x - \frac{1}{202}$  و  $\frac{1}{102}x^2 + \frac{1}{103}x - \frac{1}{206}$  و  $\frac{1}{104}x^2 + \frac{1}{105}x - \frac{1}{210}$  و  $\frac{1}{106}x^2 + \frac{1}{107}x - \frac{1}{214}$  و  $\frac{1}{108}x^2 + \frac{1}{109}x - \frac{1}{218}$  و  $\frac{1}{110}x^2 + \frac{1}{111}x - \frac{1}{222}$  و  $\frac{1}{112}x^2 + \frac{1}{113}x - \frac{1}{226}$  و  $\frac{1}{114}x^2 + \frac{1}{115}x - \frac{1}{230}$  و  $\frac{1}{116}x^2 + \frac{1}{117}x - \frac{1}{234}$  و  $\frac{1}{118}x^2 + \frac{1}{119}x - \frac{1}{238}$  و  $\frac{1}{120}x^2 + \frac{1}{121}x - \frac{1}{242}$  و  $\frac{1}{122}x^2 + \frac{1}{123}x - \frac{1}{246}$  و  $\frac{1}{124}x^2 + \frac{1}{125}x - \frac{1}{250}$  و  $\frac{1}{126}x^2 + \frac{1}{127}x - \frac{1}{254}$  و  $\frac{1}{128}x^2 + \frac{1}{129}x - \frac{1}{258}$  و  $\frac{1}{130}x^2 + \frac{1}{131}x - \frac{1}{262}$  و  $\frac{1}{132}x^2 + \frac{1}{133}x - \frac{1}{266}$  و  $\frac{1}{134}x^2 + \frac{1}{135}x - \frac{1}{270}$  و  $\frac{1}{136}x^2 + \frac{1}{137}x - \frac{1}{274}$  و  $\frac{1}{138}x^2 + \frac{1}{139}x - \frac{1}{278}$  و  $\frac{1}{140}x^2 + \frac{1}{141}x - \frac{1}{282}$  و  $\frac{1}{142}x^2 + \frac{1}{143}x - \frac{1}{286}$  و  $\frac{1}{144}x^2 + \frac{1}{145}x - \frac{1}{290}$  و  $\frac{1}{146}x^2 + \frac{1}{147}x - \frac{1}{294}$  و  $\frac{1}{148}x^2 + \frac{1}{149}x - \frac{1}{298}$  و  $\frac{1}{150}x^2 + \frac{1}{151}x - \frac{1}{302}$  و  $\frac{1}{152}x^2 + \frac{1}{153}x - \frac{1}{306}$  و  $\frac{1}{154}x^2 + \frac{1}{155}x - \frac{1}{310}$  و  $\frac{1}{156}x^2 + \frac{1}{157}x - \frac{1}{314}$  و  $\frac{1}{158}x^2 + \frac{1}{159}x - \frac{1}{318}$  و  $\frac{1}{160}x^2 + \frac{1}{161}x - \frac{1}{322}$  و  $\frac{1}{162}x^2 + \frac{1}{163}x - \frac{1}{326}$  و  $\frac{1}{164}x^2 + \frac{1}{165}x - \frac{1}{330}$  و  $\frac{1}{166}x^2 + \frac{1}{167}x - \frac{1}{334}$  و  $\frac{1}{168}x^2 + \frac{1}{169}x - \frac{1}{338}$  و  $\frac{1}{170}x^2 + \frac{1}{171}x - \frac{1}{342}$  و  $\frac{1}{172}x^2 + \frac{1}{173}x - \frac{1}{346}$  و  $\frac{1}{174}x^2 + \frac{1}{175}x - \frac{1}{350}$  و  $\frac{1}{176}x^2 + \frac{1}{177}x - \frac{1}{354}$  و  $\frac{1}{178}x^2 + \frac{1}{179}x - \frac{1}{358}$  و  $\frac{1}{180}x^2 + \frac{1}{181}x - \frac{1}{362}$  و  $\frac{1}{182}x^2 + \frac{1}{183}x - \frac{1}{366}$  و  $\frac{1}{184}x^2 + \frac{1}{185}x - \frac{1}{370}$  و  $\frac{1}{186}x^2 + \frac{1}{187}x - \frac{1}{374}$  و  $\frac{1}{188}x^2 + \frac{1}{189}x - \frac{1}{378}$  و  $\frac{1}{190}x^2 + \frac{1}{191}x - \frac{1}{382}$  و  $\frac{1}{192}x^2 + \frac{1}{193}x - \frac{1}{386}$  و  $\frac{1}{194}x^2 + \frac{1}{195}x - \frac{1}{390}$  و  $\frac{1}{196}x^2 + \frac{1}{197}x - \frac{1}{394}$  و  $\frac{1}{198}x^2 + \frac{1}{199}x - \frac{1}{398}$  و  $\frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{201}x - \frac{1}{402}$  و  $\frac{1}{202}x^2 + \frac{1}{203}x - \frac{1}{406}$  و  $\frac{1}{204}x^2 + \frac{1}{205}x - \frac{1}{410}$  و  $\frac{1}{206}x^2 + \frac{1}{207}x - \frac{1}{414}$  و  $\frac{1}{208}x^2 + \frac{1}{209}x - \frac{1}{418}$  و  $\frac{1}{210}x^2 + \frac{1}{211}x - \frac{1}{422}$  و  $\frac{1}{212}x^2 + \frac{1}{213}x - \frac{1}{426}$  و  $\frac{1}{214}x^2 + \frac{1}{215}x - \frac{1}{430}$  و  $\frac{1}{216}x^2 + \frac{1}{217}x - \frac{1}{434}$  و  $\frac{1}{218}x^2 + \frac{1}{219}x - \frac{1}{438}$  و  $\frac{1}{220}x^2 + \frac{1}{221}x - \frac{1}{442}$  و  $\frac{1}{222}x^2 + \frac{1}{223}x - \frac{1}{446}$  و  $\frac$

مجلس الشورى

الثانية من الكميات ذات السدين وبارومتر

المختلفة المركبة من هذه الحدود الثانية المأخوذة منى وبالرمز  $\mu$  بمؤنة

محاصل ضربها ثلاث وهكذا ثم بالرمز لم محاصل ضرب جميع هذه الحدود

الثانية ويفرض أن حاصل ضرب الكميات ذات الحدين هو

$$m_1 + p_1 + m_2 + p_2 + m_3 + p_3 + \dots + m_n + p_n$$

فأضربت هذه النكة الكثيرة الحدود في نكة جديدة من ذوات الحدين

هـ بكه س + هـ تحصل من عملية الضرب هذا الحاصل

لقد تأخروا. وبما قد ورثتموه

$$r + s = m + m + m + \dots + \frac{m(1-m)^{n-1}}{(1-m)} + \frac{m(1-m)^{n-2}}{(1-m)} + \dots + \frac{m(1-m)^0}{(1-m)}$$

بند ١٨٨ فاذا جعل  $r$  رمزاً للحد من مرتبة  $m$  في طرف الثاني

من القانون اتقدم أعني رمزاً للحد المسوق حد دور عدد  $m$  فانه يحد

$$r = \frac{m(1-m)(1-m)^2 \dots (1-m)^{n-1}}{(1-m)^0 + (1-m)^1 + \dots + (1-m)^{n-1}}$$

وهذا مقدار هو المعروف بأحد القوى لقيمة  $r + s$  لا يمكن

بالاستعانة استخرج جميع الحدود بالابتداء من الحد الثاني ثم

في هذا المقدار على التوافق

$$r = 1, s = 2, r = 3, s = 4, \dots$$

مثلاً إذا اردت إيجاد الحد الخامس من القوة الثانية عشر للقيمة  $s + r$  فلهذا

بعد إجراء العمل  $m = 12$  و  $n = 5$  وجب أن يكون  $m = 7$  و  $s = 5$  ونسأ

نرى أن يوضح من القانون مستخدم

$$r = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 66$$

بند ١٨٩ ويؤخذ من تحليل القيمة  $r + s$  أنه يمكن تحصيل كور أي حد

لحاصل ضرب عددين. شايبة ليكيات. في ذرة الحدين عدد ١٠. مضروباً  
 في ١٠ وبناء على ذلك يكون هذا الحاصل شايبة من حاصل ضرب الحدين والثانية  
 ليكيات من دوات الحدين. عدد ١٠ + ١٠ ومن هنا يؤخذ إذا كان القانون  
 السابق محققاً ما حصل ضرب مضارب عددها ١٠ كان مطرداً  
 في حاصل ضرب مضارب عددها ١٠ + ١٠. وحيث أنه محقق في حاصل ضرب  
 مضروبين فيكون مطرداً في خواص ضرب جملة مضارب  
 ١٨٧ سند فإذا فرضنا أن كل من الحدين والثانية ليكيات ذات الحدين المضروبة  
 في بعضها ما و للحد ح فإن حاصل الضرب وهو

$(س + ح)(س + ح)(س + ح) \dots (س + ح)$  يؤول إلى القوة البينية لليكة  $س + ح$   
 ويكون المكرر  $ح$  للحد الثاني من هذا الحاصل ما و بالحد  $ح$  مكرراً بقدر  
 $م$  الذي هو عدد المضارب أي  $م$  والمكرر  $ح$  للحد الثالث ما و  
 للحد  $ح$  مكرراً بقدر عدد خواص ضرب مختلفة مكونة من حروف عدد  $ها$   
 $م$  مأخوذة مشني أعني  $\frac{٢(١-٢)}{٣ \times ٤ \times ١}$  والمكرر  $ح$  للحد الرابع ما و  
 للحد  $ح$  مكرراً بقدر عدد خواص ضرب مختلفة مكونة من حروف عدد  $ها$   
 $م$  مأخوذة ثلاث أعني  $\frac{٢(١-٢)(١-٢)}{٣ \times ٤ \times ١}$  وهلم جواً فإذا يكون

150

$$7 + 5^7 + 5^5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^6 + 5^1 + 5^7 + 5^5$$

١٩. <sup>ب</sup> يلزم أن تكون حدود تحليل النكحة (س + ح) التي على إبعاد متساوية

من الحدين المتطرفين متحدة في المكررات

ولذا يقال أولاً كما تقدم أن الحد الميسوق محدود بعدد دهاج يكون

$$\sum_{r=0}^n \frac{(1+p)^r \dots (r-p)(1-p)r}{2^r \dots r!} = \sum_{r=0}^n \frac{(1+p)^r}{2^r}$$

وحيث أن تحليل الكمية (س + ح) مركب من حمض وقلعته هـ

الحمد لله الذي هدانا لهذا ما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله

الحمد لله الذي جعلنا من عباده

خبر

$$\frac{(1+2) \cdot \dots \cdot (1-p)(1-p)p}{(1-p) \cdot \dots \cdot p \cdot x \cdot x} = \frac{8}{1+2-p}$$

وہمکی ان یغرض ان الحد <sup>۱۴۲</sup> ہیکون اقرب <sup>۱۴۱</sup>

أن يكون أسع من م-د ويقضي في أسع

۱۰۰

$$(1-p)^n = (1-p)(1-p)\dots(1-p)(1-p)$$

بواسطة ضرب مكرر لحد سابق عليه في الأس الذي يوجد به المجهول  $s$  في  
 هذا الحد السابق وقمة حاصل الضرب على الأس الذي يوجد به  $h$  في الحد  
 المذكور بشرط أن يضاف إلى هذا الأس واحد أو يسميه المكرر المذكور على الحد  
 السابقة على الحد المطلوب واما الأس فانها سغير عن أصلها بمعنى أن  
 الأس المجهول  $s$  يتناقص عن أصله واحدًا فواحدًا من حد إلى تاليه واس  $h$   
 تزايد عن أصله واحدًا فواحدًا

ويكفي للبرهنة على هذا القانون بوجه عام أن يفرض أنه يراد تحصيل الحد المسبوق  
 بحد ودد عدد  $h-1$  وذلك بأن يغير الحد  $h$  بالحد  $h+1$  في المقدار

ج فيحدث

$$\frac{(1-h)(1-h+1) \dots (1-h+h-1)}{(1+h) \times 2 \times \dots \times h} = \frac{1}{h}$$

وجنبت يمكن بمقتضى منطق القانون المذكور استنتاج الحد  $h+1$  من الحد  $h$

ويمكن بواسطة هذا القانون تكوين جميع حدود فترة الحكمة  $(s+h)$  بالابتداء

من الحد الأول  $s$  ومن هنا يعلم أن عملية التحليل تكون قد انتهت متى تحصل

الحد  $h$  لأن الأس المجهول  $s$  الذي يلزم أن يضرب فيه الحد  $h$  ليحصل

من ذلك الحد التالى له ليس الا صفرًا

(١٤٤)

١٥٠ (س+ح)؟ وحينئذ يكون تحليل هذه الميزة محققاً مع الحد كـ ح<sup>٢</sup> س<sup>٢</sup>؟ على حد  
آخر لا يختلف عن ذلك الحد إلا بكون الحرف ح وضع فيه بدل الحرف س، س  
بدل ح وهو بناء على ذلك كفاية عن كـ س<sup>٢</sup> ح<sup>٢</sup>؟ المتبوع بحدود عددها  
م ومن البديهي بمقتضى قانون أسس المجهول س في تحليل الميزة (س+ح)<sup>٢</sup>  
أن الحد كـ س<sup>٢</sup> ح<sup>٢</sup>؟ يكون متبوعاً بحدود عددها م وحينئذ يكون  
مكرر الحد المتبوع بحروف عددها م عين مكرر الحد المسبوق بحدود  
عددها م .

١٥١ س<sup>٢</sup>د وتحصيل تحليل الميزة (س-ح)؟ يكفى أن نضع - بدل ح في تحليل  
هذه الميزة فتكون الحدود الزوجية المرتبة التي يرى فيها أن ح مرفوع  
الى قوى فردية المرتبة مسبق بالعلامة - والحدود الفردية المرتبة  
باقية على حالها وحينئذ نجد

$$(س-ح)^2 = س^2 - ٢سح + ح^2$$

١٥٢ س<sup>٢</sup>د وإذا فرض في تحليل الميزة (س-ح) أن س = ١ و ح = ١ . نجد  
أن مجموع مكررات تحليل هذه الميزة = ١ .  
الحدين المتطرفين

ومن هنا شاهد أن حدى هذا الكسر يشتمل على مضارب هي الاعداد  
الصحيحة من  $2 + 1$  الى  $2 - 2$  فاذا حذف المضارب المشتركة كان

مقدار المكر  $2 - 1$  عين مقدار المكر  $2 + 1$

وثانياً أن مكرر الحد المبوق بحدود عددها  $2$  يكون كفاية عن عدد حواصل  
ضرب مختلفة مركبة من حروف عددها  $2$  ومأخوذة نوناً ونوناً ومكرر  
الحد المبوق بحدود عددها  $2 - 2$  كفاية عن حواصل ضرب مختلفة  
بحروف عددها  $2$  ومأخوذة بمقدار  $2 - 2$  لكن اذا تكونت

الحواصل المركبة من حروف عددها  $2$  نوناً ونوناً تحصل من ذلك حواصل  
مركبة من الحروف التي عددها  $2$  المذكورة ومأخوذة بمقدار  $2 - 2$   
وذلك بأن يقسم بالتوالى حاصل ضرب هذه الحروف على كل من الحواصل  
المأخوذة نوناً ونوناً وحينئذ يكون عدد حواصل الضرب المأخوذة بمقدار  
 $2 - 2$  مساوياً لعدد الحواصل المأخوذة نوناً ونوناً

وثالثاً اذا جعل  $ك$  رمزاً للمكرر الحد المبوق بحدود عددها  $2$  فان  
هذا الحد يكون كفاية عن  $ك$   $2 - 2$  وحينئذ ان الكمية ذات الحدين  
 $2 + 2$  لا تغير بتغيير وضعي الحرفين  $2$  فلا يحصل تغيير في تحليل الكمية  
( $2 + 2$ )



کتابخانه شخصی حضرت آیت الله العظمی بروجردی

کتابخانه شخصی حضرت آیت الله العظمی بروجردی

کتابخانه شخصی حضرت آیت الله العظمی بروجردی

کتابخانه شخصی حضرت آیت الله العظمی بروجردی

کتابخانه شخصی حضرت آیت الله العظمی بروجردی

کتابخانه شخصی حضرت آیت الله العظمی بروجردی

کتابخانه شخصی حضرت آیت الله العظمی بروجردی

کتابخانه شخصی حضرت آیت الله العظمی بروجردی

کتابخانه شخصی حضرت آیت الله العظمی بروجردی

کتابخانه شخصی حضرت آیت الله العظمی بروجردی

کتابخانه شخصی حضرت آیت الله العظمی بروجردی

کتابخانه شخصی حضرت آیت الله العظمی بروجردی

کتابخانه شخصی حضرت آیت الله العظمی بروجردی

کتابخانه شخصی حضرت آیت الله العظمی بروجردی

کتابخانه شخصی حضرت آیت الله العظمی بروجردی

فاذا فرض مثل ذلك في تحليل المكية (س-ح) شوهده أن مجموع مكررات  
 المحدث الفردية المرتبة يساوي مجموع مكررات الحدود الزوجية المرتبة  
 ١٩٣ ويمكن لتحليل قوة أي كمية ذات حدين ان يبدأ بتحليل قوة  $2^0$  كما ذكرنا  
 هذه القوة مكررة س + ح أو س - ح ثم يستعوض الحرفان س ح بحدى المكية  
 ذات الحدين المفروضة وجنثا يلزم لتحصي تحليل المكية (س-ح)  $2^0$   $2^1$   $2^2$   $2^3$   $2^4$   
 ان يبدأ بتحصي تحليل المكية (س-ح) وهو

$$س - ٥ ح + ١٠ ح^٢ - ١٠ ح^٣ + ٥ ح^٤ - ح^٥$$

ثم يوضع  $س$  بدل  $س$  و  $٣ ح$  بدل  $ح$  فيحصل  
 (س-٣ ح)  $٣ ح^٢ = ٣ س - ٩ ح + ٩ ح^٢ - ٩ ح^٣ + ٣ ح^٤ - ٣ ح^٥$   
 + ٨١ ح^٥ - ٨١ ح^٤ + ٤٢ ح^٣ - ٤٢ ح^٢ + ٢٧ ح - ٢٧ ح^٢

ويمكن وضع هذه العلبة هكذا

| $\frac{1}{0}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{5}{4}$ |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| ١             | ٥             | ١٠            | ١٠            | ٥             |
| ١             | ٣             | ٦             | ٩             | ٦             |
| ١             | ٣             | ٦             | ٩             | ٦             |
| ١             | ٣             | ٦             | ٩             | ٦             |

$$س - ٥ ح + ١٠ ح^٢ - ١٠ ح^٣ + ٥ ح^٤ - ح^٥ + ٨١ ح^٥ - ٨١ ح^٤ + ٤٢ ح^٣ - ٤٢ ح^٢ + ٢٧ ح - ٢٧ ح^٢$$

فاما الصنف الاول فهو مكون من جملة كوربوطها اعداد صحيحة آخذة  
 في انصاف

لکنہ یازم قبل ان شروع فی

یہاں پتھریلے ایسے بڑے بڑے کھنڈے اور ٹکڑے

ذالريد استخراج البذر والتكبيكة كثيرة لعدد ودلائكة

۱- ۳۶ حش + ۷۶ حش - ۲۴ حش + ۳۳ حش - ۹ حش = ۲۵ حش

يُحِبُّ رَبَّهُ عِلَافًا وَالْكِبِيرَةَ الْكُبْرَى الْمُجِدِّدَ الْحَيَّ الْقِيَمَةَ الْمُنْتَهَى

خبر من ...

شريف من ذلك له ذاكادير... من شياخب لدرجات لتنازبة لمرف

من كان في الاول من هذا الشهر

من الجذور والنباتات التي تزرع في  
الحدائق والبيوت المحمية

الاولى هي التي وهو بالاول

فَاذْجَعِلْ لِي رِزْقًا مُجْتَمِعًا ۖ اِنَّكَ لَآ تَدْرِي لَآوِلَّامِنْ تَكُنِي ۚ

الكثرة الحدود المفارقة

$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r^2} \right) = -\frac{2}{r^3} \frac{dr}{dt}$

وَمَا تَعْلَىٰ ذَٰلِكَ بَلَدٌ

8-7 = ۳۶ حش + ۶۶ خشی + ۱۴ ش = ۲۰۸ ش + ۲۰۸ کس

لمتدارين التخييليين ل + ع = ا - ل - ع - ا - ع ونلاحظ ما تقرر في

$$\begin{aligned} \text{بأن قوى } \text{ا - ل} \text{ تحصل القانونان } \frac{(1-2)^2}{2 \times 1} + \frac{(1-2)^2}{2 \times 1} = 1 \text{ و } \frac{(1-2)^2}{2 \times 1} + \frac{(1-2)^2}{2 \times 1} = 1 \\ \text{ل + ع = ا} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ل - ع = ا} \end{aligned}$$

### في استخراج جذور الكميات الكثيرة الحدود

١٩٠ قد شوهد في علم الحساب أن كيفية تركيب مربع مجموع عددين ومكعبه توصّل  
إلى القواعد المتعلقة باستخراج كل من الجذر التربيعي والتكعبي للأعداد ويمكن  
أن تكون معرفة المحدثين الأولين س + م ح س من تحليل النكة (س + م)  
معدة لتكوين الطرق التي ينبغي اتباعها في استخراج جذور الأعداد على أي  
وجه كانت درجتها وبذلك يتوصل إلى قواعد مثابة للقواعد التي تستعمل  
في استخراج كل من الجذر التربيعي والتكعبي ولما كانت هذه القواعد نادرة  
الاستعمال وجب علينا هنا أن نعرض عن ذكرها ونقتصر على ذكر استخراج  
جذور الكميات الحرفية



وهذه هي الطريقة التي يجب اتباعها في كل وقت.

کتابخانه منحصراً مخصوصاً حضرت مولانا محمد شفیع صاحب مدظلہ العالی

و ۴۳: یثی لایسب الخمول و منه سدا کیکه ل فومر

و من بعد یوحنا زاده دهم

٢٠٠٠

*Handwritten signature*

حسنی بن محمد بن علی بن ابی طالب

$$y = (x^2 - 3x + 2) = (x-1)(x-2) \quad \therefore x = 1, 2$$

(۷-۴-۲۰۲۰)

ومضانیج

$$8 - (9 - 3 - 2) = 3 \times 2 + (3 - 3 - 2) = 6 - 2 = 4$$

وهذه المتساوية يؤخذ منها انه اذا طرح من القيمة الكبيرة

الجزء ٣ - من جذور الأحاديث

ضرب الحد الاول من البنية ل في جـ اثناسيوس

4

$$4x^2 - 3x + 2 + 5x^2 + 4x - 1 = 9x^2 + x + 1$$

$$4x^2 - 3x + 2 + 5x^2 + 4x - 1 = 9x^2 + x + 1$$

$$4x^2 - 3x + 2 + 5x^2 + 4x - 1 = 9x^2 + x + 1$$

$$4x^2 - 3x + 2 + 5x^2 + 4x - 1 = 9x^2 + x + 1$$

$$4x^2 - 3x + 2 + 5x^2 + 4x - 1 = 9x^2 + x + 1$$

الباقي الثاني

$$4x^2 - 3x + 2 + 5x^2 + 4x - 1 = 9x^2 + x + 1$$

$$4x^2 - 3x + 2 + 5x^2 + 4x - 1 = 9x^2 + x + 1$$

$$4x^2 - 3x + 2 + 5x^2 + 4x - 1 = 9x^2 + x + 1$$

( )

(٣٢١)

الاحيرة أن يضاف إلى ثلاثة أمثال مربع  $\epsilon$  -  $\delta$  -  $\gamma$  حاصل الضرب المركب

من ثلاثة أمثال  $\epsilon$  -  $\delta$  -  $\gamma$   $\gamma$  +  $\delta$  +  $\epsilon$  ومربع  $\delta$  ويضرب هذا الحاصل

في  $\delta$  وطرحه من الباقي الثاني يكون الباقي صفراً وجنثي يكون

$\epsilon$  -  $\delta$  -  $\gamma$   $\delta$  هو الحد الذي تكفي للكمة الكبيرة الحدود المخروضة



[illegible][illegible]

وهذا يلزم لا يخرج الجذر المسمى بكلمة كثيرة الحدود كالكلمة في أن ترتب  
قوة الكلمة بحسب الدرجات التنازلية أو الصاعدة بحرف وانفرد.

جاء في الفروع كتاب الكيفية التي بها يمكن تحصيل غير الكيفية كما في كتابه

كالكيفية فلا تقصروا —

حيث رأيت كية كثيرة الحدود هي كاية عن حاصل ضرب مركب من متغيرات مساوية للجذر المطلوب عددها  $m$  فإذا كانت هذه الكية هي  $m$  فإذن كلاهما مرتب بحسب الدرجات المتساوية للحرف  $x$  فإذن إذا كان  $m$  من الكية  $m$  يكون كاية عن حاصل ضرب مركب من مضارب عددها  $m$  هو منها  $m$  والجذر الأول من الجذر وثبات على ذلك يكون الحد الأول من الجذر هو الجذر يسمى الحد الأول من الكية الكثيرة الحدود  $m$

والاجتناب التكرار يعرض أنه قد تحصل حصة من حدود الجذور  $m$  لا بد

غير معرفة الكيفية التي تستعمل لتحصيل الحد التالي للحد المذكور ولهذا

يجعل  $m$  رمز المجموع الحدود المتحصلة  $m$  و  $r$  رمز الباقي حدود  $m$  فيكون

$x = r + m$  ومن هنا يحدث يجعل  $r$  رمز الباقي  $m$  —

$$x - r = m = m^2 + m + \frac{m(m-1)}{2} x + \dots$$

فإذا جعل  $r$  رمز الحد الأول من الجذور  $m$  و  $r$  رمز الحد  $m$  فيكون

على اعظم أس للتغير  $m$  أعني للحد الذي يراد أن يبحث عنه الآب

كان



الجذر اليميني لها لاوا. فيتصل الحد الاول من جذرها ثم يقسم حدها  
الثاني على لقوة التي درجتها (م-١) للحد الاول من الجذر

مضروبة في م فيتصل الحد الثاني من هذا الجذر ثم تطرح من البقية الكثرة  
 الحدود في القوة الباقية لمجموع جذري الجذر المتحصلين ويتقسم الحد الاول  
 من الباقي على القوة التي درجتها (م-١) للحد الاول من الجذر مضروبة  
 في م فيتصل الحد الثالث من هذا الجذر وهلم جرا

ويشاهد بالسهولة ان كانت البقية الكثرة محدودا المفروضة قوسية  
 صحيحة ان هذه العمليات، توصل الى باق معدوم وكذلك اذا كانت  
 هذه العمليات توصل الى باق معدوم فان البقية الكثرة الحدود المفروضة  
 تكون قوة مربعة صحيحة ويكون مجموع الحدود المتحصلة بهذه المثابة  
 هو الجذر المطلوب. البقية الكثرة الحدود المفروضة

ويشاهد ايضا بمقتضى براهين مشابهة للبراهين المقررة في شأن  
 الجذر التربيعي (٩٥) انه اذا كانت البقية الكثرة الحدود المفروضة  
 مرتبة بحسب الدرجات التنازلية للحرف الاصل فلا شك ان العملية  
 تكون غير منتهية متى كان الجذر محتويا على حد مشتمل على الحرف المذكور باس  
 اذا ضرب



١٩٨ القوة الممثلة في الكثرة الحد والمتحصلة من عملية الضرب

• جذري يسمى الجذر  $\sqrt[n]{a}$  كان الجذر المسمى كثيرة الحد والمفروضة  $\frac{a}{b}$

في الاعداد المشكورة التي على صورة الاشكال الهندسية  
وفي معرفة الاكوام المنتظمة من الكل

١٩٨ س. يوجد بين مكررات قوتين متواليتين للكمية  $s + h$  ارتباطات  
تتنبط منها عدة قواعد لا بأس بمعرفة

مثلاً اذا فرض أن القوة الممثلة للكمية  $s + h$  هي

$$s^4 + h^4 + s^3h + hs^3 + s^2h^2 + h^2s^2 + sh^3 + hs^3 + h^4$$

وضربت هذه الكمية الكثرة الحدود في  $s + h$  كان حاصل الضرب هو

$$s^5 + h^5 + s^4h + hs^4 + s^3h^2 + h^2s^3 + s^2h^3 + h^3s^2 + sh^4 + hs^4 + h^5$$

$$s^5 + h^5 + s^4h + hs^4 + s^3h^2 + h^2s^3 + s^2h^3 + h^3s^2 + sh^4 + hs^4 + h^5$$

ومن هنا يؤخذ أنه يمكن لتحصيل أي حد من القوة التي درجتها  $(m+1)$

للكمية  $s + h$  أن يضاف الى مكرر الحد الذي من مرتبته في القوة الممثلة

مكرر الحد السابق عليه

والأخير من هذين الحدين وهو ٥٠ مكون من ١٠ ر ١٠ والعدد الأخير  
من هذين العددين وهو ١٠ هو مجموع ٦ ٥ ٤ ٣ هو مجموع العددين

$$١٥٣ \text{ وحيث يكون } ١+٣+٦+١٠+١٥+٢١=٥٦$$

سبب القاعدة المتقدمة (في سند) المستعملة أساس التكوين الثالث

الحسابي والخاصية المذكورة في البند السابق يمكن استنباطها بالسهولة

من نظرية التوافق لانه نشاهد أن مكرر الحد الذي درجته (٢ + ١)

من انقوة التي درجتها (٣ + ١) للقيمة ٣ + ١ يساوي عدد توافق

قدرها ٣ + ١ من الحروف التي كل حاصل ضرب مكون منها مشتمل على حرف

عددها ٣ وحيث أن هذه التوافق تعتبر مركبة من جزئين أحدها

التوافق التي لا تحتوي على واحد من الحروف كالحرف ٣ مثلاً و١٠

عين عدد التوافق ٣ المركبة من الحروف التي كل واحد من خواص ضربها

مشتمل على حروف عددها ٣ وثانيهما التوافق المحتوية على حرف ٣

التي عددها عين عدد التوافق ٣ المركبة من الحروف التي كل واحد من

خواص ضربها مشتمل على حروف عددها ٣ - ١ فيتحصل بذلك ملاحظة

في (سند)

(٣٤٩)

من الصف الثالث يكون  $١ + ٠$  أى ١ وحده الثانى  $١ + ١$  أى ٢ وحده  
الثالث  $١ + ٠$  أى ١ وأما الصف الرابع فانه يتكون من الثالث كأن  
الثالث تكون من الثانى وهلم جرا وحيث أن الحدين الاولين من الصف  
الثانى يمكن اعتبارهما كمكررى القوة الاولى للمية  $س + ح$  فتستنبط  
من ذلك القاعدة المتقدمة وهى أن حدود الصف الثالث تكون  
مكررات لتحليل المية  $(س + ح)$  ومكررات الصف الرابع تكون مكررات  
لتحليل المية  $(س + ح)$  وهكذا

ويطلق على هذا الجدول الذى يمكن تطويله الى غير نهاية اسم المثلث  
الحسابى للعلم بالسكال

بيد ويمتنع تركيب المثلث الحسابى يشاهد بالسهولة أن الحد الذى  
مرتبه  $ح$  من أى صف فى هو عبارة عن مجموع الحدود الاول التى عدد  
 $ح$  من الصف الا فى السابق عليه لانه اذا لوحظ الحد  $٥٦$  وهو الحد  
السادس من الصف الرابع فهو أنه مكون من ضم العددين  $٢١, ٣٥$   
الى بعضهما وهذا العددان يوجدان على يمين الحد المذكور فى الصف الثالث  
والرابع والثانى من العددين المذكورين وهو  $٣٥$  هو مجموع العددين  
٢١ ٣٥



... ..  
... ..

... ..

... ..

... ..

...

... ..

... ..

...

...

...

...

...

... ..

... ..

$$(٢) = ٢ + ٢ + ٢ - ١ = ٥ \dots \dots \dots (١)$$

وهذه ست وبة بربها على القاعدة المتقدمة (في سبيل)

ويلزم بهذه الطريقة التوافق على الحد الذي ترتيبه

ج من صفاتي من المثلث الحاسبي يكون ما ويا بالجميع الحدود الأول

لن تعددها ج من الصف لا في السابق عليه ان ينسب على أن الحد الأول

من صفاتي الذي ترتيبه (٢+١) من المثلث الحاسبي يكون موجوداً

في الصف رأسى الذي ترتيبه (٢+١) ومن هنا يتبين الحد الذي ترتيبه

ج من الصف لا في الذي ترتيبه (٢+٢) يكون موجوداً في الصف

الرأسى الذي ترتيبه (٢+٢) ثنى أنه يكون واحداً من مكورات تحليل

البيكة (٣+٢) <sup>١-٢+٢</sup> وسيثبت كون مكورات الحد الذي ترتيبه (٢+٢)

من هذا التحليل لأنه يشغل في الصف اللفظي للترتبة (٢+١) وبناءً على

ذلك يكون هذا الحد كناية عن عدد التوافق ٢-٢+١ المركبة من

أحرف التي كل واحد من حواصل ضربها مشتمل على أحرف عددها ج

$$\text{أو } (٢-٢+١)$$

إذا تقر هذا ووضعت في القانون (١) ٢-٢+١ بدل م تحصل من ذلك القانون

$$= (٢-٢+١)$$







التي هي في الحقيقة مقدار من مجموع يسببه بنتان بجمعية وجميع اسكن

في مقدارها ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠

من مجموعها ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠

لا يمكن ان يكون هذا المقدار من مجموعها ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠

في الحقيقة ان مقدارها ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠

في الحقيقة ان مقدارها ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠

عدد مشتق من ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠

من ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠ و ١٠٠

ومع هذه المجموعة يوجد ان مجموع المتقدم ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠

المجموع لمكون من حدوداً متساوية او ترتيبها متساوية الاعداد المتساوية

مضافاً اليه المجموع المكون من حدوداً متساوية او ترتيبها متساوية الاعداد المتساوية

وحيث تقدم ان المجموع المكون من الاعداد المتساوية الى الاعداد المتساوية ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠

فاذا وضع في هذا المقدار ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠

اضيف هذا المقدار الى بعضها فحصل عدد كل الكوم المربعي وهو

$$١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠ + ١٠٠$$

والكوم



بأنه لا يمكن أن يكون له أكثر من واحد من الأعداد الثلاثة  
 من حيث أن كل واحد من هذه الأعداد لا يمكن أن يكون له أكثر من واحد من  
 الأعداد الثلاثة من حيث أن كل واحد من هذه الأعداد لا يمكن أن يكون له أكثر من واحد من  
 الأعداد الثلاثة من حيث أن كل واحد من هذه الأعداد لا يمكن أن يكون له أكثر من واحد من  
 الأعداد الثلاثة من حيث أن كل واحد من هذه الأعداد لا يمكن أن يكون له أكثر من واحد من

### في بيان أن كل واحد من الأعداد الثلاثة لا يمكن أن يكون له أكثر من واحد من الأعداد الثلاثة

في بيان أن كل واحد من الأعداد الثلاثة لا يمكن أن يكون له أكثر من واحد من الأعداد الثلاثة  
 في بيان أن كل واحد من الأعداد الثلاثة لا يمكن أن يكون له أكثر من واحد من الأعداد الثلاثة

في بيان أن كل واحد من الأعداد الثلاثة لا يمكن أن يكون له أكثر من واحد من الأعداد الثلاثة  
 في بيان أن كل واحد من الأعداد الثلاثة لا يمكن أن يكون له أكثر من واحد من الأعداد الثلاثة  
 في بيان أن كل واحد من الأعداد الثلاثة لا يمكن أن يكون له أكثر من واحد من الأعداد الثلاثة  
 في بيان أن كل واحد من الأعداد الثلاثة لا يمكن أن يكون له أكثر من واحد من الأعداد الثلاثة  
 في بيان أن كل واحد من الأعداد الثلاثة لا يمكن أن يكون له أكثر من واحد من الأعداد الثلاثة



بمقتضى ما ذكرناه من أن مجموع الأجزاء هو  $2^n$  وهو عدد زوجي  
 ومما نلاحظه من الحدود الأخيرة  $2^{n-1}$  و  $2^{n-2}$  ... و  $2^1$  و  $2^0$  هي  
 كجبة وكون  $2^n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^1 + 2^0$

$2^n = (2^{n-1} + 2^{n-2}) + 2^{n-3} + \dots + 2^1 + 2^0$   
 وحيث أن حدود الثلاثة الأولى من هذا الحاصل تقسم بقسمة على الكمية  
 $2$  التي تقسم بمقتضى المعرفية الحاصل  $2^n$  فيلزم أن تقسم  $2^{n-1}$   
 ومن هنا يؤخذ أنها تقسم جميع حدود  $2^n$  فإذا فرضنا أن  $2^n$  و  $2^{n-1}$   
 كتابة عن حدود الكيتين  $2^n$  و  $2^{n-1}$  اللتين يدخل فيهما  $2$  بأعلى أس وأن  
 الحد  $2^{n-1}$  داخل في الحاصل  $2^n$  لا يمكن اختصاره مع أي حد  
 من هذا الحاصل فإنه يكون غير قابض بقسمة على الكمية  $2$  لأن هذه الكمية  
 لا تقسم بمقتضى المعرفية الكيتين  $2^n$  وحيث لا يمكن أن الكمية  $2$   
 تقسم الحاصل  $2^n$  بدون أن تقسم كلا من صبيه  $2^{n-1}$  و  $2^{n-2}$

### الحالة الرابعة

إذا كانت الكمية  $2^n$  مخوبة على الحرف  $2$  والكمية  $2^{n-1}$  مبنية بعدد أولي



مجلس شورای ملی - تهران - ۱۳۰۲

تاریخ

۱

اینک که در این مجلس شورای ملی  
با این همه کسب و کار و این همه  
تلاش و کوشش و این همه  
تلاش و کوشش و این همه

تلاش و کوشش و این همه

تلاش و کوشش و این همه

تلاش و کوشش و این همه

تلاش و کوشش و این همه

تلاش و کوشش و این همه

۲

تلاش و کوشش و این همه

تلاش و کوشش و این همه

فإنه إذا كان  $\alpha$  من  $\mathbb{R}$  فإنه يمكن أن نكتب  $\alpha = \frac{p}{q}$  حيث  $p, q \in \mathbb{Z}$  و  $q \neq 0$ .  
 في هذه الحالة  $\alpha$  يسمى عدداً كسرياً.

مثال ١:  $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{6}$

وحيث أن لكل عدد حقيقي  $\alpha$  يوجد عدد حقيقي  $\beta$  بحيث  $\alpha + \beta = 0$  فإننا نكتب  $\beta = -\alpha$  ونسمي  $\beta$  بالعدد المعكوس لـ  $\alpha$ .  
 ويكون حاصل ضرب  $\alpha$  في  $\beta$  قابلاً للتقسيم على هذه القيمة ولكن حيث أن  
 القيمة الأولية محتوية على  $0$  فلا تكون قابلاً للتقسيم على عدد موجب  
 يكون له قابلاً للتقسيم على  $0$  لأنه إن لم يكن كذلك كان حاصل الضرب  
 $0$  غير قابل للتقسيم على  $0$  (كافي الحالة الثانية) فإذا جعل  $0$  رمزاً  
 لخارج قسمة  $0$  على  $0$  فإنه يجد  $0 = \frac{0}{0}$

مثال ٢:  $0 = \frac{0}{0}$

ويمكن البرهنة بمثل ذلك على أن  $0$  يقبل القسمة على  $0$  لأنه إذا جعلنا  
 $0$  رمزاً لخارج القسمة فحصل

مثال ٣:  $0 = \frac{0}{0}$

وتبوا العمل إلى أن يكون الطرف الأول محتوياً على  $0$  يتوصل إلى المتساوية  
 $0 = 0$



وزيادة على ذلك يكون  $\delta$  دالة على كمية صحيحة لأن  $m$  و  $n$  و  $k$  كلها  
 صحيحان فإذا ضرب طرفي المتساوية المذكورة في  $\delta$  ثم قسمنا على  $3$  حصل

[illegible]

$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r^2} \right) = -\frac{2}{r^3} \frac{dr}{dt}$

وَمَا نَرَىٰ فِيهَا مِثْرًا وَلَا كَيْدًا  
وَلَا يَصْلَاهَا إِلَّا الْأَشْقَى  
الَّذِي كَفَرَ بِالْعِزِّ نِدًّا  
فَرَجَاهُ يَوْمَ الْقِيَامِ

[illegible][illegible]



والمؤمنون في الدنيا والآخرين في الآخرة

والمؤمنون في الدنيا والآخرين في الآخرة

والمؤمنون في الدنيا والآخرين في الآخرة

والمؤمنون في الدنيا والآخرين في الآخرة

والمؤمنون في الدنيا والآخرين في الآخرة

والمؤمنون في الدنيا والآخرين في الآخرة

والمؤمنون في الدنيا والآخرين في الآخرة

والمؤمنون في الدنيا والآخرين في الآخرة

والمؤمنون في الدنيا والآخرين في الآخرة

والمؤمنون في الدنيا والآخرين في الآخرة

والمؤمنون في الدنيا والآخرين في الآخرة

والمؤمنون في الدنيا والآخرين في الآخرة

والمؤمنون في الدنيا والآخرين في الآخرة

والمؤمنون في الدنيا والآخرين في الآخرة

سريعة مستندة ببرهان خارج سهولة على الجذور بأي درجة نيكية صحيحة  
لا يمكن أن يكون نيكية كسرية وهذه البرهنة لا تختلف من مستندة في  
شأن الأعداد الصحيحة (١١)

### في القاسم المشترك الأعظم بين

عدة كميات جبرية صحيحة

نبدأ بطلاق اسم القاسم المشترك الأعظم بين عدة كميات جبرية صحيحة  
على حاصل ضرب جميع المضامين الأولية العددية والحرفية المشتركة بين  
هذه الكميات

نبدأ ويؤخذ من هذا التعريف أن القاسم المشترك الأعظم بين عدة حدود  
يتحصل بهذه الكيفية وهي أنه يبحث عن القاسم المشترك الأعظم بين مكرراتها  
العددية ويكتب عقب هذا العدد كل حرف مشترك بين جميع الحدود  
بأصغر أس له وحينئذ يلزم لإيجاد القاسم المشترك الأعظم بين الحدود  
٢٣٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠ ٢١ ٢٢ ٢٣ ٢٤ ٢٥ ٢٦ ٢٧ ٢٨ ٢٩ ٣٠ ٣١ ٣٢ ٣٣ ٣٤ ٣٥ ٣٦ ٣٧ ٣٨ ٣٩ ٤٠ ٤١ ٤٢ ٤٣ ٤٤ ٤٥ ٤٦ ٤٧ ٤٨ ٤٩ ٥٠ ٥١ ٥٢ ٥٣ ٥٤ ٥٥ ٥٦ ٥٧ ٥٨ ٥٩ ٦٠ ٦١ ٦٢ ٦٣ ٦٤ ٦٥ ٦٦ ٦٧ ٦٨ ٦٩ ٧٠ ٧١ ٧٢ ٧٣ ٧٤ ٧٥ ٧٦ ٧٧ ٧٨ ٧٩ ٨٠ ٨١ ٨٢ ٨٣ ٨٤ ٨٥ ٨٦ ٨٧ ٨٨ ٨٩ ٩٠ ٩١ ٩٢ ٩٣ ٩٤ ٩٥ ٩٦ ٩٧ ٩٨ ٩٩ ١٠٠  
الأمور عن القاسم المشترك الأعظم بين الأعداد ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠ ٢١ ٢٢ ٢٣ ٢٤ ٢٥ ٢٦ ٢٧ ٢٨ ٢٩ ٣٠ ٣١ ٣٢ ٣٣ ٣٤ ٣٥ ٣٦ ٣٧ ٣٨ ٣٩ ٤٠ ٤١ ٤٢ ٤٣ ٤٤ ٤٥ ٤٦ ٤٧ ٤٨ ٤٩ ٥٠ ٥١ ٥٢ ٥٣ ٥٤ ٥٥ ٥٦ ٥٧ ٥٨ ٥٩ ٦٠ ٦١ ٦٢ ٦٣ ٦٤ ٦٥ ٦٦ ٦٧ ٦٨ ٦٩ ٧٠ ٧١ ٧٢ ٧٣ ٧٤ ٧٥ ٧٦ ٧٧ ٧٨ ٧٩ ٨٠ ٨١ ٨٢ ٨٣ ٨٤ ٨٥ ٨٦ ٨٧ ٨٨ ٨٩ ٩٠ ٩١ ٩٢ ٩٣ ٩٤ ٩٥ ٩٦ ٩٧ ٩٨ ٩٩ ١٠٠  
أنه ١١ فيكون القاسم المشترك الأعظم بين الحدود المفروضة هو  
١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠ ٢١ ٢٢ ٢٣ ٢٤ ٢٥ ٢٦ ٢٧ ٢٨ ٢٩ ٣٠ ٣١ ٣٢ ٣٣ ٣٤ ٣٥ ٣٦ ٣٧ ٣٨ ٣٩ ٤٠ ٤١ ٤٢ ٤٣ ٤٤ ٤٥ ٤٦ ٤٧ ٤٨ ٤٩ ٥٠ ٥١ ٥٢ ٥٣ ٥٤ ٥٥ ٥٦ ٥٧ ٥٨ ٥٩ ٦٠ ٦١ ٦٢ ٦٣ ٦٤ ٦٥ ٦٦ ٦٧ ٦٨ ٦٩ ٧٠ ٧١ ٧٢ ٧٣ ٧٤ ٧٥ ٧٦ ٧٧ ٧٨ ٧٩ ٨٠ ٨١ ٨٢ ٨٣ ٨٤ ٨٥ ٨٦ ٨٧ ٨٨ ٨٩ ٩٠ ٩١ ٩٢ ٩٣ ٩٤ ٩٥ ٩٦ ٩٧ ٩٨ ٩٩ ١٠٠

[illegible]

وهذا لا يتأتى إلا بالاعتماد على ما تحت يدي من مقتضات دجلة لأبكر  
في أغلب الأحوال التي تتصور في هذه البلاد بوصفها باقية في  
درجته أقل من درجة مكة المكرمة من حيث صلابتها وقوت  
قوى من خارجها من غير أن يكون لها من القوة العريضة وال  
قوة الجريئة ما كان له من قبل من قوة في مكة من  
الأغنياء القوية من غير أن يكون لها من القوة العريضة وال

والتدبير الحكيم في هذه الأمور هو الذي لا يترك شيئا من هذه الأمور  
مكتراة في يده بل يتركها في أيدي الخلق ليظهر قوتهم وفضلهم  
ويعلمهم في كل وقت من وقته. واما في هذه الأمور التي هي من  
الغيب في الغالب فليس من الحكيم ان يتركها في أيدي الخلق بل  
يجب ان يكون في يده ويطبقها في كل وقت من وقته.

(١٥)

ينتهي من الحدين هو د ح فاد قسم الكمية م على ح حتى والكمية

م على ح حتى تحصل خارجان صحيحا

$$د = ح ح ح ح + د ا ح ح - ح ا ح ح - لا ح ح ح + د ا ح ح$$

$$ن = ح ح ح ح + ح ح ح ح + ح ح ح ح + ح ح ح ح - ح ح ح ح$$

وجيذا يكون القاسم المشترك الأعظم بين الكيتين م د الكثير في الحدود

ساويا القاسم المشترك الأعظم بين الكيتين د م مضروباني ح ح

يبدا ونحن الآن عن الكيفية التي يلزم سلوكها في تعيين القاسم المشترك

الأعظم بين الكيتين د م والصحيحتين الكثير في الحدود غير المحتوتين على

مضارب مشتركة ففرض أن هاتين الكيتين تكونان مرتبتين بالنسبة للحرف

س وأن درجة الكمية د لا تزيد عن درجة الكمية ح فإن كانت الكمية

د تقسم الكمية ح قسمة صحيحة فإنها تكون هي القاسم المشترك الأعظم

المطلوب فإذا قسمت الكمية ح على الكمية د

رفض أن القسمة غير صحيحة وتحصل من ذلك خارج قسمة صحيح كالخارج

ك وباقي كالباقي ق درجته اقل من درجة الكمية د بالنسبة

الى س تحصل من ذلك المتبقي

= د

عنه

- وفي نسخة أخرى ما ذكره في نسخة أخرى من  
 هذا ما في نسخة أخرى من نسخة أخرى من  
 أن يكون من نسخة أخرى من نسخة أخرى من  
 بين النسختين نسخة أخرى من نسخة أخرى من  
 لاية غير مشوية على طرف من نسخة أخرى من  
 ليس لهما بالسور من مكررات دقيقة  
 وهناك مثالا على ذلك هو

۲۰۰۰ س. ۱۰۰ س. ۵۰ س. ۲۰ س.

[illegible]

۱-۲-۳-۴-۵-۶-۷-۸-۹-۱۰-۱۱-۱۲

$$-5x^2 + 3x - 2 - (3x^2 - 5x + 2) = -5x^2 + 3x - 2 - 3x^2 + 5x - 2$$

6-10-74

۳-۴-۵-۶-۷-۸-۹-۱۰

د من مضارب الكمية د

وذلك ان يكون د في كثير الحدود محتويين على حرف واحد كما حذف  
س فان مكررات قوى هذا الحرف تكون أولية مما في كل كمية كثيرة الحدود  
لانه قد فرض انه حذف من كلتاهما بين الكيتين سائر مضارب الحد د  
وينتج من ذلك ان القاسم المشترك الأعظم بين الكيتين د و د الكير في  
الحدود هو حاصل ضرب المضارب الأولية المشتركة بين الكيتين لا يتغير  
اذا ضرب المقوم د في مكرر الحد الأول من الكية د أو في أي مضروب  
لهذا المكرر وبهذه الكيفية تجرى عملية القسمة الأولى الجزئية بلا كسور  
وباجراء عملية مشابهة للتقدمة في اثناء قسمة د على د يتحصل مقوم  
جزئي لا يكون فيه مكرر الطرف الأول فابداً للقسمة على مكرر الحد الأول  
من المقوم عليه ويتوالى العمل هكذا الى ان يتوصل الى باق كالباقي ق تكون  
درجته دون درجة الكية د يلزم لايجاد القاسم المشترك الأعظم بين  
الكيتين د و د الكير في الحدود ان تقسم الكية د على الكية ق بشرط  
ان يحذف ما يوجد من المضارب المشتركة بين حدود الكية الباقية ق  
حيث انه لا يوجد مثلها في الكية د وباجراء هذه العمليات على درجات  
الباقية

## مقسمة

$$\begin{array}{r}
 ٣ \text{ ش } ٥ - ٢ \text{ ش } ٦ - ١ \text{ ش } ٥ - ١ \text{ ش } ٥ \\
 \hline
 ١ \text{ ش } ٥ - ٢ \text{ ش } ٦ - ١ \text{ ش } ٥ - ١ \text{ ش } ٥ \\
 \hline
 ١ \text{ ش } ٥ - ٢ \text{ ش } ٦ - ١ \text{ ش } ٥ - ١ \text{ ش } ٥
 \end{array}$$

فيكون القاسم المشترك الأعظم هو ش ٣ + ش ٢ + ش ١ + ١  
 وقبل الانتقال الى الاموال التي تكون فيها الكميات الكثيرة الحدود  
 فعتوية على عدة حروف يلزم بيان الكيفية التي يمكن بها إيجاد القاسم  
 المشترك الأعظم بين عدة كميات متى علم القاسم المشترك الأعظم بين كمي  
 فاذا كان المطلوب إيجاد القاسم المشترك الأعظم بين الكميات الاربع  
 هـ ز هـ و يفرض أن هـ هو القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين  
 هـ و أن هـ هو القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين و هـ  
 وأن هـ هو القاسم المشترك الأعظم بين الكميتين و هـ فيكون  
 القاسم المشترك الأعظم بين الكميات الاربع هـ هـ هـ و هو  
 و لأن هـ ما كان يحتوي على سائر المصادر ببالأولية المشتركة





*[Handwritten notes]*

*[Handwritten signature]*

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840.

1944

*[Handwritten signature]*

مشترک لائبریری بن جی بی د ر ہورڈ ہسپتال لائبریری

پیشکشیں کی طرف متوجہ رہیں۔

بہترین ہے۔ لکھنؤ قلعہ و دہلی کا حرم علی گڑھ لکھنؤ قلعہ و

مُسَوِّتِينَ عَلَى مَرْفٍ وَجَدَّيْهِ: مَلُوحَاتٌ مُخَفِّفَةٌ، مَكْرِيَاتٌ لَوَحِيَّةٌ

وَقَدْ بَيَّنَّا فِي مَدَامِ سِيمٍ وَحْدَهُ نَهْضُ ابْنِي

منقولہ : "..... لفظ کا یہ معنی ہے کہ خدا ان سب کو بہت کثرت

[illegible][illegible]

م = رضی - ی = جس + ی = ہا + اے = تے - (نہیں - تو) - ج = اور

$$20 = 2 \text{ ریگ} - 2 \text{ شش} + 2 \text{ دوش} - 1 \text{ سس} + 1 \text{ قش} - 1 \text{ چش} + 1 \text{ دوش} + 1 \text{ سس} + 1 \text{ قش} + 1 \text{ چش} + 1 \text{ دوش} + 1 \text{ سس} + 1 \text{ قش} + 1 \text{ چش}$$

من العلوم في هذا المأثور لقاسم المشترك الأثني عشر مائة واثني عشر



ويؤيد من هذان المقادير ، لأنهم يرون ، يستعملون حركاتهم ،  
 ج ، ر هو س - ، وبنائهم على ذلك يؤيد ، ج ، ر هو س - ،

ليكتبين مفروقتين م ، م هو

(ص - ) (س - ) = ص س س - س - ص +

١١٤ يستند وتستقل أيضاً من الحالة التي تكون فيها الكميات الكبيرة نحدود محتوية  
 على حرف واحد فقط الى الحالة التي تكون فيها هذه الكميات محتوية على  
 حرفين ثم نستقل من هذه الحالة الاخيرة الى الحالة التي تكون فيها تلك  
 الكميات محتوية على ثلاثة حروف وهم ج ر وبنائهم على ذلك يمكن تعيين القاسم  
 المشترك الأعظم بين عدة كميات محتوية على عدة حروف

١١٥ يستند ولنمثل بذلك بالكميتين ج ، ر في التخصيصات في بيانهما وهما

ج = - - - - - ج ر ش + ج ر ش - ، ش - - - - - ج ر ش + ١٦ ص

ر = - - - - - ر ش ج + ر ش - - - - - ر ش - - - - - ر ش - ١٧

وحيث ان كمية ر لا تحتوي على س ، الا بعد ج ر حروف في قاسم  
 مشترك لأعظم بين الكميتين وسأعلى ذلك يكون قاسم مشترك الكمية ج  
 المرتبة بالنسبة الى ص هكذا

- - - - - ر ش ج + ج ر ش - ، ش - - - - - ر ش - ١٨

(٣٥٨)

بالنسبة الى الكمية  $ه$  هو  $د = ش - ا$  والقاسم المشترك الأعظم بين قوى  
س بالنسبة الى الكمية  $د$  هو  $ع = ش - ا = ص + ا = (ص - ا)$  والقاسم  
المشترك الأعظم بين  $د$  و  $ع$  هو  $ص - ا$   
فاذا قسمت الكمية  $م$  على  $ش - ا$  والكمية  $د$  على  $ش - ا = ص + ا$  نحصل  
من ذلك الخارجان

$$د = ع = (ص - ا) ش + ٢ - ش - (١٠ ص - ا)$$

$$ن \quad ٢ = ٢ (ص - ا) ش + ٧ - ص - (٣ ص + ا)$$

ولكى يكون خارج قسمة الكمية  $د$  على الكمية  $ه$  صحيحين نقرب الكمية  
 $د$  في  $٢$  فيحصل الباقي

$$- ه = ش + ع + (٣ ص + ا) - (٣ ص - ا) - (١ ص - ا)$$

ويلزم لتوالى عملية القسمة ان يضرب المقوم الجزئى الثانى في  $٣ (ص - ا)$

فيتوصل الى باقى ذى درجة اولى بالنسبة الى  $س$  هو

$$(١٨ ص - ٣٠ ص + ع٢) - س - (١٨ ص - ٣٠ ص + ع٢)$$

فاذا حذف من هذا الباقي المقروب  $١٨ ص - ٣٠ ص + ع٢$  آلب

$$ق = س - ا$$

وبنسة الكمية  $ه$  على الباقي  $ق$  يكون باقى هذه القسمة صفراً

ولتخذ

ذات استوى لا على قوى صحيحة موجبة لقدره  $\frac{1}{2}$  كزوايا كزوايا

هذه بقوى كيات سيما التقت وحيداً فالكيفية ذات الحدود -

س -  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  دلالة تامة للحرف س والكيفية

س -  $\frac{3}{4}$  س -  $\frac{1}{4}$  دلالة تامة للحرفين س ص

ويقال أيضاً ان دلالة التامة بكيفية وحدة واحدة كيات تكون

قابلة للقسمة على دلالة اخرى تامة لهذه الكيات متى كان من نفس

تامة بالنسبة لتلك الكيات

وقد علم من حل المعادلات ذات الدرجة الثانية ان يعرف لأول

معادلة مشابهة لهذه المعادلات هو حاصل ضرب مضروبين بدنية

اولى بالنسبة الى س وعلى ذلك تكون كيات ذات حدود -

س -  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  مثلاً هي حاصل ضرب مضروبين -  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

س -  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

وسبق ان هذه النظرية تقتصر على حالة واحدة - سرعة تامة هي ان

دلالة تامة بكيفية س كاندلالة س + ج + س + ج + س + ج

(بجعل م ومراً محدداً صحيح هو درجة الدلالة ومكرر الحد لأول

هو واحد) تكون نهاية عن حاصل ضرب عدة مضارب بدرجة اول

(٣٦)

وجنباً يبحث عن القاسم المشترك الأعظم بين هاتين اليكيتين الكبيرتين المحدودتين  
الأخيرتين وعن القاسم المشترك الأعظم بين

$$-٤ \text{ ش} + ٧ \text{ ح} - ٦ \text{ ص} , -٣ \text{ ح} + ٤ \text{ ص}$$

فيرى أنه  $-٣ \text{ ح} + ٤ \text{ ص}$  وحيث أن هذا القاسم يقسم اليكبة  $٤$  قيمة صحيحة  
فيؤخذ من ذلك أن  $-٣ \text{ ح} + ٤ \text{ ص}$  هو القاسم المشترك الأعظم بين  
اليكيتين الكبيرتين المحدودتين  $٤$  و  $٥$   
ونذكر للتقريب مثالين هما

$$\text{الاول } ٦ = ٦ - ١ \text{ ش} + ٠ \text{ ح} - ٠ \text{ ص} \quad ٠$$

$$٤ = ٤ - ٠ \text{ ش} - ١٥ \text{ ح} + ٣ \text{ ص}$$

فالقاسم المشترك الأعظم بين هاتين اليكيتين هو  $-٣ \text{ ح} + ٤ \text{ ص}$

$$\text{والثاني } ٥ = (٤ - ١ \text{ ح} + ٠ \text{ ش}) + (٠ \text{ ح} - ١٥ \text{ ح} + ٣ \text{ ص}) + ١٠ \text{ ح} - ١٠ \text{ ح}$$

$$٥ = (٤ - ١ \text{ ح} + ٠ \text{ ش}) + (٠ \text{ ح} - ١٥ \text{ ح} + ٣ \text{ ص}) + ١٠ \text{ ح} - ١٠ \text{ ح}$$

فالقاسم المشترك الأعظم بين هاتين اليكيتين هو  $-٣ \text{ ح} + ٤ \text{ ص}$

في تحليل الدلالات التامة لكبرى كالكبرى  $٣$  الى

مضارب بدرجة اولى

١٦ ويطلق على اليكبة الجبرية القاسم الدلالة التامة لحرف أو لعدة حروف  
اذا كانت

(١٠٦٣)

$$ج = (س - ح) \times \frac{ج}{س} + \frac{ج}{س}$$

ومن هنا يؤخذ

$$\frac{ج}{س} = \frac{ج}{س} \times \frac{س}{س} + \frac{ج}{س}$$

وينبغي بالفرض أن يكون  $\frac{ج}{س}$  كفاية عن دلالة تامة للمتغير س  
وحيث أن الباقي رتبة غير محتوية على س فلزم أن يكون  $\frac{ج}{س}$  دلالة  
تامة للمتغير س وعلى ذلك إذا كان س - ح لا يقسم الدلالة ج يلزم  
أن يكون قاسماً للدلالة ج

### النظرية الثانية

سند أي دلالة تامة للمتغير س لا يكون لها غير جملة واحدة من المضارب  
التي بدرجة أولى

والبرهنة على هذه النظرية يفرض حاصل لضرب

$$ج = (س - ح) (س - د) (س - هـ) \dots (س - ز)$$

فأجعل ج رمزاً المضروب غير محتوي على س وفرض هذا الحاصل  
يساوي حاصل ضرب آخر هو

$$ج = (س - ح) (س - د) (س - هـ) \dots (س - ز)$$

فإن المضروب س - ح الذي يقسم الحاصل الثاني يكون قاسماً بالضرورة للحاصل

عددها م كالمضارب س - ح ، س - د ، س - هـ ونحو ذلك يجعل  
 ح ، د ، هـ ، ونحو رموز الكيات مشتملة على المتغير س ويمكن أن  
 تكون هذه الكيات مقادير تخيلية تؤمنع بالصورة ل + ف ٧ - ١

فان كان مكرر المحد الأول من الدلالة غير الواحد فانه يتحصل من قسمتها  
 على هذا المكر خارج درجته عين درجتها يتحلل بالمثابة المتقدمة فاذا جعل  
 م رمز المكر المحد الأول فان الدلالة المذكورة تكون مساوية لحاصل  
 ضرب بوضع بالصورة ح (س - ح) (س - د) (س - هـ) ونحو

سند النظريات المتقدمة (في بندي ٤٠٦ ، ٤٠٧) تطبق على المضارب التي بدرجة  
 اولى من الدالات التامة ولا تختلف عنها الا ببعض تغيير في منطوق  
 المسائل وبراهينها

### النظرية الاولى

سند أي مضروب بدرجة اولى كالمضروب س - ح الذي يقسم  
 حاصل ضرب الداليتين التامتين ح ، د يقسم بالضروب واحدة  
 منها لانه اذا كانت الدلالة ح لا تقبل القسمة على س - ح تحصل من  
 القسمة خارج صحيح كالحاج ك بالنسبة الى س وباقي كالباقى غير المحتوي  
 س وجيشه تحصل هذه المساوية وهي





الأول وجب أن يلزم بمقتضى النسبية المتقدمة أنه يكون قاسماً لواحد من  
 المضارب س - ح ، س - د ، س - هـ ، ومن هنا يعلم أنه يكون ماوياً لأحد المضارب  
 مثلاً إذا فرض أن ح = ح فقطع النظر عن المضروبين المتساويين س - ح  
 ، س - د كان الخارجيات متساويين ومن هنا يؤخذ أن المضروب  
 س - د يكون ماوياً لواحد من المضارب س - د ، س - هـ ، س - ز  
 ويتولى العمل بهذه المثابة يعلم أن مضارب حاصل الضرب المشتركة على  
 س تكون مقاوية النظر لنظيره وجب أن ينبج من ذلك أن  $ج = د$   
 يجب ليفرض أن  $د = هـ$  كناية عن داليتين تامتين للتغير س فإذا  
 كانت مضارب بدرجة أولى من مضارب الدلالة  $ج$  تقسم الدلالة  
 هـ فإن حاصل ضرب هذه المضارب المشتركة يكون هو القاسم المشترك  
 لأعظم بين داليتين المذكورتين بالنسبة إلى س  
 وخصيص هذا القاسم مشترك الأعظم يلزم أن يجري على ذلك عمل مشابه  
 أهمية بحال القاسم المشترك الأعظم بين كيتين محتمتين كثيرتي الحدود  
 لأنه إذا فرض أن الدلالة  $هـ$  لا تزيد في درجة عن الدلالة  $ج$  وكانت  
 الدلالة  $هـ$  تقسم الدلالة  $ج$  كانت هي القاسم المشترك الأعظم  
 المطلوب فإن لم تكن قاسمة لها يفرض أن خارج انقصة هو ك والباقى  
 فان

(٢٦٧)

$$٤ش - ١٣ش + ٥ش - ٢ش - ١ش$$

ويفرض أنه يراد تحصيل مقدار هذه الكمية الكثرة للحدود عند ما يكون  $ش = ٢$  فيجئ العمل بهذه المثابة وهي .

$$٤+ = ٤ - ٢ \times ٤+ , ٤+ = ٥ + ٢ \times ١- , ١- = ١٣ - ٢ \times ٤$$

$$١٠+ = ١ - ٢ \times ٦+ , ٦+ = ٣ \times ٤+ ,$$

وحينئذ يكون العدد ١٠ هو الناتج المطلوب لأن هذا العدد يكون بموجب هذه العلقات مساوياً

$$١ - ٤ \times ٤ - ٣ \times ٤ - ٢ \times ٤ - ١٣ - ٢ \times ٤$$

سند ويطلق اسم جذر المعادلة الكلية أو مقدار تحلى إذا وضع في هذه المعادلة بدل المجهول صر هاستطابقة

والحل العمومي للمعادلات بنحو : في إيجاد مقادير الجذور بالنسبة لمكررات جميع المعادلات المتحدة في الدرجة و قد صار البحث مدة طويلة عن هذا الغرض و ذكرت (في سند) الكيفية التي يحصل التوصل بها إلى المعادلة ذات الدرجة الثالثة وسيأتى بيان الكيفية التي يتوصل بها إلى حل المعادلة ذات الدرجة الرابعة غير أن العوائق المتحصلة بهذه المثابة توضع بصورة لا يمكن ستم النجاة في إيجاد المقادير الرقمية للجذور بواسطة استبدالها بمقادير المكررات فلم تكن

ولا يفرض الحد الأول مكرر غير الواحد لانه ان تخلف من الواحد قسمت سائر  
حدود المعادلة على هذا المكرر بدون أن يخل تعاد لها

سند برمز على وجه الاختصار لدلالات كبة كالتيه س بالرموز  
د (س) و د (س) هـ (س) و الح و برمز أيضا لدلالات الهيكلين س ص بالرموز  
د (س ص) د (س ص) و الح ولا بد من اختلاف الرمز الموضوع امام القوسين  
اذا اختلفت الدلالات المذكورة لكن اذا تكرر في الواحد المستعمل بهذه المثابة  
في عملية حسابية كان دالا على دلالات مركبة بصفة واحدة وحينئذ اذا كانت  
دلالة مبينة بالرمز د (س) فالرمز د (ح) يكون دالا على ما توول اليه  
هذه الدلالة اذا وضع فيها هـ بدل س والرمز د (ص) يكون دالا  
على ما توول اليه تلك الدلالة اذا وضع فيها ص بدل س والرمز  
د (٢) يكون دالا على ما توول اليه عندما يفرض فيها أن  $س = ٣$  وكذلك  
يكون الرمز د (٢) دالا على ما توول اليه الدلالة د (س ص) عندما يفرض  
فيها أن  $ص = ٣$  وأن س يكون باقيا على حاله

سند ولكي يحسب بأبسط طريقة المقدار الذي يكون لدلالة تامة للتيه  
س عندما يفرض للتغير س مقدار في تجري العمل كما في هذا المثال وهو  
لتفرض الكبة الكثيرة الحدود

(۳۶)

|                 |                                 |                               |
|-----------------|---------------------------------|-------------------------------|
| $\frac{م}{م+م}$ | $ص + م(۱-م) + م(۱-م) + \dots +$ | $م + م + م + م + م + \dots +$ |
| $\frac{م}{م+م}$ | $م + م(۱-م) + م(۱-م) + \dots +$ | $م + م + م + م + م + \dots +$ |
| $\frac{م}{م+م}$ | $م + م(۱-م) + م(۱-م) + \dots +$ | $م + م + م + م + م + \dots +$ |
| $\frac{م}{م+م}$ | $م + م(۱-م) + م(۱-م) + \dots +$ | $م + م + م + م + م + \dots +$ |

ثم يوضع على وجه الاختصار

$$م = م + م + م + م + م + \dots +$$

$$م = م + م + م + م + م + \dots +$$

$$م = م + م + م + م + م + \dots +$$

$$\dots$$

وجب أن تكون

$$م = م + م + م + م + م + \dots +$$

وحيث أن  $م$  هي الكمية الكبيرة المزدوجة المزدوجة

من الكمية الكبيرة المزدوجة  $م$  بضرب كل حد في  $م$

عن أصله الواحد في هذا الحد وتنتج

السابقة عليها كما استنتجنا الكمية  $م$  من الكمية  $م$

ويطلق على الكمية الكبيرة المزدوجة  $م$  اسم الكمية المزدوجة

هذه الأخيرة مُحَقَّقَةٌ لبعض شروط خصوصية كانت قد تقدم ذلك في المعادلة  
ذات السدرة الثالثة

وشر هذه الصعوبة كانت تنأى في المعادلة التي تزيد عن تلك المعادلة في  
الدرجة لو حصل التوصل إليها بالقوانين المذكورة

وكان يلزم حينئذ أن يبحث عن الطرق التي يمكن بواسطتها حساب جذور معادلات  
جميع مكرراتها مبينة بأعداد مربعة

و نستمدى لذلك النظريات العمومية التي قد بنيت عليها هذه الطرق فنقول

في تركيب تحليل الكمية الناتجة من دلالة تمامة للمتغير  $x$

عند وضع  $x$  بدل  $x$

سيجد لكن  $x^2 + x + 1 + x^2 + x^2 + x^2$

هي دالة تمامة مثلاً

فإذا وضع  $x$  بدل  $x$  آذ ذلك إلى

$x^2 + x + 1 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x^2$

وإذا حلت قوى البكّة ذات الحدين  $x^2 + x + 1$  ورقت بحسب الدرجات

لتأزلية للمتغير  $x$  نحصل



(٣٧٥)

فقط وعلى المشتقة  $\text{هـ}$  اسم مشتقة  $\text{هـ}$   $\text{لح}$  ويقال أيضاً للكية  $\text{هـ}$  المشتقة الثانية والكية  $\text{هـ}$  المشتقة من المرتبة الثالثة وهم جـ ر

ومنى كانت دلالة مبينة بالرمز  $\text{د}$  (س) كانت مشتقاتها المتوالية مبينة بالرمز

$\text{د}$  (س) ،  $\text{د}$  (س) ،  $\text{د}$  (س) ،  $\text{لح}$  وبمقتضى ذلك تؤول المعادلة السابقة الى

$$\text{د}(\text{س} + \text{ص}) = \text{د}(\text{س}) + \text{د}(\text{س}) + \text{د}(\text{س}) + \frac{\text{ص}}{\text{د}(\text{س})} + \frac{\text{ص}}{\text{د}(\text{س})} + \frac{\text{ص}}{\text{د}(\text{س})} + \text{لح}$$

وحيث أن أعلى أس للكية  $\text{س}$  ينقص عن أصله بواحد بالانتقال من كبة كيرة

الحدود معلومة الى مشتقتها الاولى أو من مشتقة الى التالية لها فيكون من

كبة كيرة الحدود درجاتها مشتقات متوالية عددها م الأخير منها

غير محتوية على  $\text{س}$  وبشاهد بالسهولة انه اذا كان الحد الاول من الكية

الكيرة الحدود مبيناً كاسية بالرمز  $\text{هـ}$   $\text{س}$  كانت المشتقة الأخير

أو المشتقة التي رتبتهما م مبينة هكذا

$$\text{هـ} \times \text{م} \times \dots \times \text{هـ} \times \text{م}$$

وبناء على ذلك يتحصل من قانون الحدود المركبة للدلالة  $\text{د}(\text{س} + \text{ص})$  المقدار

$\text{هـ}$   $\text{م}$  للحد الأخير وهذا هو المشاهد فيما تقدم اذ من البديهي بعد وضع

$\text{س} + \text{ص}$  بدل  $\text{س}$  في الكية الكيرة الحدود  $\text{هـ}$   $\text{س}$  ،  $\text{هـ}$   $\text{س}$  ،  $\text{لح}$  أنه

يحدث من الكية  $\text{هـ}$  (س + ص) الحد  $\text{هـ}$   $\text{ص}$  وحينئذ لا يكون هناك

حلتفر يكون فيه أس ص ساوياً لاس م أو أكبر من الأس م



مقدار صغير فحد كبير . . . . .  
 في كثيرة الحدود صورة بين تقويم . . . . .  
 في انوار هذه المقدار موحدة وبيان يكون . . . . .  
 مقدار متخذة في علامة مع من غير حد . . . . .  
 كثيرة الحدود كثير بقدر يكون مقدور . . . . .  
 وغيره . . . . .

بسم : في كثيرة الحدود  $جس + دس + عس + فس$  وكانت لأسس  
 . . . . .  
 كثيرة الحدود مركبة من عدد محدود من حدود وصور لتغير من مقدار  
 صغير جداً موجب أو سالب كالـ  $ك$  كثيرة الحدود مقدار صغير متخذ في علامة  
 مع مقدار الحد  $جس$  . . . . .

ولهذا يوضع كثيرة الحدود بصورة هكذا

$$جس + دس + عس + فس + ك$$

بالاذا ان لتغير من مقدار صغير هذا . . . . .  
 . . . . .  
 في كثيرة الحدود المحصول بين نفوس المقدار من . . . . .  
 . . . . .

ومن هنا يتبع

$$r = (ص - ١) = ص - ٩ + ص + ٩$$

فازا استعملت الطريقة المتقدمة في تحصيل الكمية التي تؤول اليها الكمية الكثيرة

الحدود  $ص - ٩ + ص + ٩ - ١$  عند ما يوضع فيها  $ص - ٩$  بدل  $ص$

حدث  $ص - ١٦ + ص + ٩ - ١ + ص + ٥$

في المقادير التي تأخذها الدالة التامة للمتغير  $ص$  عند ما يفرض المقادير الكبيرة

أو صغيرة وفي التغيرات التي تطرأ على الدالة عند ما يأخذ  $ص$

في التغير بالتوالي

سند في كثيرة الحدود  $ص^٤ + ص^٣ + ص^٢ + ص + ١$  اذا كانت الأسس

$٤, ٣, ٢, ١, ٠$  اعدادا صحيحة موجبة مكونة لتسلسلة تنازلية وفرض

للمتغير  $ص$  مقادير رقمية كبيرة وموجبة او سالبة كانت مقادير

كثيرة الحدود متحدة في العلامة مع مقادير الحد الأول  $ص^٤$  ويمكن

أن يفرض للمتغير  $ص$  مقدار كبير بحيث يكون مقدار كثيرة الحدود كبير بقدر

ما يراد ولذا توضع كثيرة الحدود المفروضة هكذا

$$ص^٤ + ص^٣ + ص^٢ + ص + ١ = ص^٤ \left( ١ + \frac{ص^٣}{ص^٤} + \frac{ص^٢}{ص^٤} + \frac{ص}{ص^٤} + \frac{١}{ص^٤} \right)$$

فالذ كان للمتغير  $ص$  مقدار كبير جدا كانت مقادير الكسور  $\frac{ص^٣}{ص^٤}, \frac{ص^٢}{ص^٤}, \frac{ص}{ص^٤}, \frac{١}{ص^٤}$

صغيرة جدا وبما أن ذلك يكون للحدود  $\frac{١}{ص^٤}, \frac{ص}{ص^٤}, \frac{ص^٢}{ص^٤}, \frac{ص^٣}{ص^٤}$  و

المحصولين لـ

و (ج + ك) - و (ج + ح) - ح

تعل ط رمز البكة صغيرة بعد ميراد و دكان عدد ج اكبر من  
 آثار المكررات الداخلة في البكات الكثيرة لحدود و (س) و (س)  $\frac{1}{x}$  ن  
 (س) ن كح فان كل حدة من حدود هذه البكات يكون بالنسبة لأى

مقدار للتغير من محصورين س، س، أصغر من هـ متماثلان كان  
 س، س، وأصغر من هـ ان كان س، س، أصغر من هـ متماثلان كان  
 س، س، أكبر من هـ ان كان س، س، أكبر من هـ متماثلان كان  
 س، س، أصغر من هـ ان كان س، س، أصغر من هـ متماثلان كان

والعدد م هـ ان كان س، س، أصغر من هـ متماثلان كان  
 بالنسبة لأى مقدار متغير س، س، أصغر من هـ متماثلان كان

و (ج + ك) - و (ج + ح) - ح  
 بحيث ان الطرف الايمن من س، س، أصغر من هـ متماثلان كان

فان فرض و (ج + ك) - و (ج + ح) - ح  
 وثابتا فرضان  $\frac{1}{x}$  و (ج + ك) - و (ج + ح) - ح  
 يتحقق الشرط الأول متوكان لـ و (ج + ك) - و (ج + ح) - ح  
 من مقادير لاتزال آخذة في الزيادة بالابتداء من ن الى م وكان

وبناء عليه تكون موجبة وحينئذ يكون لكثرة الحدود مقادير متحدة في العظمة  
مع مقادير الحد الأول  $\text{هـ س}$  ويمكن زيادة على ذلك أن يكون لكثرة  
الحدود مقدار صغير بقدر ما يراد لكون المضروب  $\text{هـ س}$  يتناقص  
مع  $\text{س}$  الى غير نهاية

سند اذا علمت دلالة تامة كالدلالة  $\text{د (س)}$  ومقدار مخصوص كالمقدار  
 $\text{ج}$  للمتغير  $\text{س}$  أمكن تحصيل كمية كالكمية  $\text{ك}$  صغيرة بقدر ما يراد  
بحيث يكون الفرق  $\text{د (هـ + ك) - د (هـ)}$  أقل من كمية معلومة صغيرة بقدر  
ما يراد ايضاً ولذا يشاهد (بمقتضى سند)

$\text{د (هـ + ك) - د (هـ) = د (هـ) ك + د (هـ) \frac{\text{ك}^2}{2 \times \text{هـ}} + \text{هـ} \frac{\text{ك}^3}{3 \times \text{هـ}^2} + \dots$   
فاذا فرض الكمية  $\text{ك}$  مقدار صغير جداً كان كل من الحدود  $\text{د (هـ) ك}$  و  
 $\text{هـ} \frac{\text{ك}^2}{2 \times \text{هـ}}$  ونحو مقدار صغير جداً بحيث أن عدد هذه الحدود محدود  
فيلزم أن تكون الكمية  $\text{ك}$  صغيرة جداً فيكون مجموع هذه الحدود صغيراً  
بقدر ما يراد وحينئذ يثبت المطلوب

### تنبيه

اذا كان  $\text{ل ر س}$  عددين معلومين وكما  $\text{هـ}$  أكبر من  $\text{ل}$  وأريد:  
تعيين الكمية  $\text{ك}$  بحيث تكون النسبة لاي مقدار يفرض للمتغير  $\text{س}$  كالمقدار

يكونان متخالفين في العلامة لان المقدارين المتطرفين  $\epsilon$  (ل) و  $\epsilon$  (س)  
متماثلان في العلامة بالفرض وحيث أنه يوجد بين مقدارى الكمية  
 $\epsilon$  (س) المتواليين المتخالفين في العلامة فرق أصغر من الكمية  $\epsilon$  ط فيكون  
كل منهما أصغر من هذه الكمية وحيث أنه لا بد من وقوع ذلك  
على أى وجه كان صغر الكمية  $\epsilon$  ط فيؤخذ من ذلك أنه يوجد بين  
ل و س بالأقل مقدار للغير س يكون الكمية  $\epsilon$  (س) مساوية للصفر

### تنبيه

حيث انه يمكن أن الكمية الكثيرة الحدود  $\epsilon$  (س) تنتقل عدة مرات من الايجاب  
الى السلب ومن السلب الى الايجاب عند ما يأخذ المجهول س فى التغير  
من ل الى س فلا مانع من انه يكون للمعادلة  $\epsilon$  (س) = عدة  
جذور حقيقية محصورة بين ل و س

### المطرفة الثانية

سند كل معادلة ذات درجة فردية لها بالآخر جذور حقيقية متوالت  
العلامة مع حدها الأخير  
مثلا لنفرض المعادلة

$$x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + \dots + z = 0$$

(٣٧٦)

لغزوفين كل مقدارين متوالين ما ويا  $\frac{\text{ط}}{\text{ط} + \text{ط}}$  أو أصغر من هذا  
نكر غحصل للدلالة و (س) جملة مقادير الغزوف فيها بين كل مقدارين  
متوالين من  $\frac{\text{ط}}{\text{ط} + \text{ط}}$  أصغر من ط

في بعض نظريات يعلم بوضوحها ان كل معادلة ل

جذر حقيقي وفي هذه النظرية وهي أن كل

معادلة لها جذر

النظرية الاولى

بين ان نحصل من العددين ل و س الموضوعين في الطرف الأول  
من معادلة كالمعادلة و (س) = . نأخذ ان تخالفان في العلامة كانت  
للمعادلة بالأقل جذر حقيقي محصور بين ل و س لانه يمكن بمقتضى  
ما تقدم في البند السابق أن تفرض للتغير س مقادير لا تزال آخذة  
في الزيادة بالابتداء من ل الى س بحيث تكون الغزوف بين المقادير  
الطابقة للكمية و (س) كلها اقل من كمية كالكية ط التي تؤخذ صغيرة  
بقدر ما يراد ولا بد أنه يوجد بين مقادير و (س) مقداران متواليان

متبوعة بعدة حدود أخرى سالبة (بفرض أن الطرف الثاني معدوم) فلا يكون للمعادلة غير جذر واحد موجب فقط

مثلاً لنفرض المعادلة

$$x^m + p x^{m-1} + \dots + q x^{m-2} - r x^{m-3} - \dots = 0$$

التي يرى فيها أن الحدود موجبة إلى  $x^{m-2}$  وأن جميع الحدود التالية لها سالبة بحيث أن الحد الأخير من هذه المعادلة سالب فلا يكون له جذر موجب لكنه يلزم أن يبرهن على أنه لا يكون له غير جذر واحد وجنيد يمكن وضع الطرف الأول من المعادلة هكذا

$$x^m + p x^{m-1} + \dots + q x^{m-2} - \frac{r}{x} + \dots = 0$$

فاذا اخذ المتغير  $x$  في الازدياد بالابتداء من الصفر فإن الكمية

$$x^m + p x^{m-1} + \dots + q x^{m-2} - \frac{r}{x} + \dots$$

وهذا لا يتأثر إلا إذا كان الحد الأول من المعادلة موجباً دون غيره وأما

$$\text{الكمية } \frac{r}{x} + \dots + \frac{r}{x^m}$$

إذا بلغ المتغير  $x$  النهاية في الزيادة فإن علامة الطرف الأول من المعادلة

لا تتغير إلا مرة واحدة وإذا لا يكون لهذه المعادلة غير جذر واحد موجب

وبفرض فيها أن م كاية عن عدد فرد  
 فاذا لوحظت في مبداء الأمر الحالة التي يكون فيها الحد الأخير سالباً وجعل  
 س = . في الطرف الأول من المعادلة المذكورة كان الناتج سالباً لكونه  
 هو الحد الأخير واذا فرض للمتغير س مقدار كبير بحيث يكون الطرف الأول  
 مقدراً في العلامة مع الحد الأول (كما في س = ١) كان الناتج موجباً ويكفي للمعادلة بالأقل جذراً  
 فاذا كان الحد الأخير موجباً وجعل س = . كان الناتج موجباً واذا فرض  
 للمتغير س مقدار سالب كبير بالحماية كان الناتج سالباً وحينئذ يكون  
 للمعادلة بالأقل جذراً سالب

### النظرية الثالثة

سند كل معادلة ذات درجة زوجية حدها الأخير سالب يكون لها  
 بالأقل جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب  
 لانه اذا جعل فيها س = . كان الناتج سالباً واذا فرض للمتغير س مقدراً  
 كبير موجب سالب كان هذا الناتج موجباً لانه مقدراً في العلامة مع  
 الحد الأول الذي لا يزال موجباً لكونه مزدوج الدرجة

### النظرية الرابعة

سند اذا كان الطرف الأول من معادلة مركباً من جملة حدود موجبة  
 منبوبة





(٣٨٠)

### النظرية الخامسة

سند أي معادلة لها جذر يوضع هكذا  $س + د \sqrt{ص} = ص$  و  $س - د \sqrt{ص} = ص$

كأن حقيقتان

مثلاً إذا فرضت المعادلات الأربع

$$س + د \sqrt{ص} = ص \quad س - د \sqrt{ص} = ص \quad س + د \sqrt{ص} = ص \quad س - د \sqrt{ص} = ص$$

شاهد أن المعادلة  $س + د \sqrt{ص} = ص$  لها جذر دائماً أنها تتحقق مما كان م

بفرض  $س = ص$  وأما المعادلات الثلاث الباقية فيأهرا ن لوأحدة

منها وهي  $س = ص$  بالأقل جذر حقيقي أو تخيلي وإن كل واحدة من

المعادلتين الآخرين وهما  $س + د \sqrt{ص} = ص$  و  $س - د \sqrt{ص} = ص$  يكون لها

جذر تخيلي متى كان م د الأعلى عدد بهذه الصورة  $ك + د \sqrt{ص}$  وحيث أنه

لم يبق علينا الآن نخبر في هاتين المعادلتين الأخيرتين الحالة التي يكون

فيها م د الأعلى عدد فردي أو على حاصل ضرب عدد فردي في واحدة

من قوى العدد ٢ فنقول ليكن  $م = ك + د \sqrt{ص}$  يجعل م رمز العدد

فردي) فإذا جعل  $ك = ص$  نحصل من ذلك المعادلتان

$$س + د \sqrt{ص} = ص \quad س - د \sqrt{ص} = ص$$

وحيث أنه سيأتي في السند أن

$$(س + د \sqrt{ص}) + 8$$

ضرباً في المضارب وأن قياس خارج قسمة المقادير الثنتين على هذه  
هو خارج قسمة قياس  $\frac{ج}{ج+د}$  على قياس المقدم عليه وحيث أن قسمة  
المكررات  $\frac{ج}{ج+د}$  و  $\frac{د}{د+هـ}$  دالة على كيان منتهية فإن حد  
نكبان  $\frac{ج}{ج+د}$  أو أحدهما في الزيادة إلى غير نهاية أخذت قسمة  
أحد  $\frac{ج}{ج+د}$  و  $\frac{د}{د+هـ}$  و  $\frac{هـ}{هـ+ز}$  و  $\frac{ز}{ز+ح}$  و  $\frac{ح}{ح+ط}$  و  $\frac{ط}{ط+لا}$  و  $\frac{لا}{لا+ص}$  و  $\frac{ص}{ص+ف}$  و  $\frac{ف}{ف+ق}$  و  $\frac{ق}{ق+ك}$  و  $\frac{ك}{ك+ج}$  في قياس  
أو غير نهاية أو أن هذه الكور تؤول إلى مقادير تجلية كالمقادير

$\frac{ج}{ج+د} + \frac{د}{د+هـ} + \frac{هـ}{هـ+ز} + \frac{ز}{ز+ح} + \frac{ح}{ح+ط} + \frac{ط}{ط+لا} + \frac{لا}{لا+ص} + \frac{ص}{ص+ف} + \frac{ف}{ف+ق} + \frac{ق}{ق+ك} + \frac{ك}{ك+ج}$   
 $\frac{ج}{ج+د} + \frac{د}{د+هـ} + \frac{هـ}{هـ+ز} + \frac{ز}{ز+ح} + \frac{ح}{ح+ط} + \frac{ط}{ط+لا} + \frac{لا}{لا+ص} + \frac{ص}{ص+ف} + \frac{ف}{ف+ق} + \frac{ق}{ق+ك} + \frac{ك}{ك+ج}$   
 المجموع  $\frac{ج}{ج+د} + \frac{د}{د+هـ} + \frac{هـ}{هـ+ز} + \frac{ز}{ز+ح} + \frac{ح}{ح+ط} + \frac{ط}{ط+لا} + \frac{لا}{لا+ص} + \frac{ص}{ص+ف} + \frac{ف}{ف+ق} + \frac{ق}{ق+ك} + \frac{ك}{ك+ج}$   
 كالمقدار  $\frac{ج}{ج+د} + \frac{د}{د+هـ} + \frac{هـ}{هـ+ز} + \frac{ز}{ز+ح} + \frac{ح}{ح+ط} + \frac{ط}{ط+لا} + \frac{لا}{لا+ص} + \frac{ص}{ص+ف} + \frac{ف}{ف+ق} + \frac{ق}{ق+ك} + \frac{ك}{ك+ج}$   
 بقدر ما يراود بنا على ذلك يكون لقياس هذا المجموع  $\frac{ج}{ج+د} + \frac{د}{د+هـ} + \frac{هـ}{هـ+ز} + \frac{ز}{ز+ح} + \frac{ح}{ح+ط} + \frac{ط}{ط+لا} + \frac{لا}{لا+ص} + \frac{ص}{ص+ف} + \frac{ف}{ف+ق} + \frac{ق}{ق+ك} + \frac{ك}{ك+ج}$   
 مقدار مختلف عن الواحد بقيل غير أن قياس  $\frac{ج}{ج+د} + \frac{د}{د+هـ} + \frac{هـ}{هـ+ز} + \frac{ز}{ز+ح} + \frac{ح}{ح+ط} + \frac{ط}{ط+لا} + \frac{لا}{لا+ص} + \frac{ص}{ص+ف} + \frac{ف}{ف+ق} + \frac{ق}{ق+ك} + \frac{ك}{ك+ج}$   
 في الزيادة إلى غير نهاية كإلى قياس  $\frac{ج}{ج+د} + \frac{د}{د+هـ} + \frac{هـ}{هـ+ز} + \frac{ز}{ز+ح} + \frac{ح}{ح+ط} + \frac{ط}{ط+لا} + \frac{لا}{لا+ص} + \frac{ص}{ص+ف} + \frac{ف}{ف+ق} + \frac{ق}{ق+ك} + \frac{ك}{ك+ج}$   
 إلى غير نهاية أي هنا وحيد ثبت المطلوب

ويلزم الآن البرهنة على أن أصغر مقدار للقياس  $\frac{ج}{ج+د} + \frac{د}{د+هـ} + \frac{هـ}{هـ+ز} + \frac{ز}{ز+ح} + \frac{ح}{ح+ط} + \frac{ط}{ط+لا} + \frac{لا}{لا+ص} + \frac{ص}{ص+ف} + \frac{ف}{ف+ق} + \frac{ق}{ق+ك} + \frac{ك}{ك+ج}$  يكون  
 مفراً بأن ثبت أن إذا كان للقياس  $\frac{ج}{ج+د} + \frac{د}{د+هـ} + \frac{هـ}{هـ+ز} + \frac{ز}{ز+ح} + \frac{ح}{ح+ط} + \frac{ط}{ط+لا} + \frac{لا}{لا+ص} + \frac{ص}{ص+ف} + \frac{ف}{ف+ق} + \frac{ق}{ق+ك} + \frac{ك}{ك+ج}$

(5A4)

أن يكون ج = ١٠ د ك = ١٠ أو ج + ح = ك = ١٠. ولنصدي للبرهنة على  
 أنه يوجد دائماً لـ ك من ج و د مقداران حقيقيان ج و د مما يتحقق  
 هذا الشرط وهو أن ج + ح = ك = ١٠. ونثبت في مبداء الأمر أن أصغر مقدار  
 ج و د الحكيمة ج + ح = ك عند تغيير كل من ج و د يكون مطابقاً  
 للمقدارين محدودين من مقادير ج و د ك ثم نبرهن على أن هذا المقدار لا يكون  
 الاصفراً (ولا يخفى أن الحكيمة ج + ح = ك هي المعروفة كاسية في قياس المقدار  
 التجلي ج + ح = ك = ١٠) فنقول —

انه يلزم للبرهنة على أن أصغر مقدار للقياس  $\frac{1}{n}$  يكون مطابقاً  
 لمقادير محدودة من مقادير  $\frac{1}{m}$  أن ثبت أنه إذا أخذت الكميات  
 $\frac{1}{m}$  أو أحدها في الزيادة إلى غير نهاية أخذت لقياس  $\frac{1}{n}$   
 في الزيادة إلى غير نهاية كذلك ولذا يكتب الطرف الأول من المعادلة هكذا

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m}$$

$$\left( \frac{1}{s} + \dots + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} + 1 \right)$$

(٣٨٥)

واذا جعل  $r$  رمزاً لاد في قوة للمحد  $r$  الذي يكون لا يؤول الى الصفر عند

جعل  $s = ع + ك - ١ - ٧$  بل أنه يوضع بهذه الصورة وهي  $١ - ٧ + ف - ١ - ٧$

فلا يكون  $r = ٠$  ف  $= ٠$  في آن واحد

وبمقتضى ذلك اذا جعل  $ع + ك - ١ - ٧$  رمزاً للمقدار الذي تأخذه الكثرة

الحدود (٤) عند ما يوضع فيها  $ع + ك - ١ - ٧$  بدل  $s$  هو بدل

$r$  حدث

$$ع + ك - ١ - ٧ = ع + ك - ١ - ٧ + (١ - ٧ + ف - ١ - ٧) هـ و ..... (١)$$

+ (الحدود المشتركة على  $هـ^{١+٢}$   $هـ^{٢+٢}$   $هـ^{٣+٢}$  .....  $هـ^{٩}$ )

ويمكن ان يفرض اختيار المعين و مقدار بحيث يكون  $و = ١$  أو  $و = -١$

$$\text{فيحدث } ع + ك - ١ - ٧ = ع + ك - ١ - ٧ \pm (١ - ٧ + ف - ١ - ٧) هـ +$$

(الحدود المشتركة على  $هـ^{١+٢}$   $هـ^{٢+٢}$   $هـ^{٣+٢}$  .....  $هـ^{٩}$ )

وبانفصال الاجزاء الحقيقية من الاجزاء التخيلية يحدث

$$ع = ع \pm ١ هـ + (الحدود المشتركة على  $هـ^{١+٢}$   $هـ^{٢+٢}$   $هـ^{٣+٢}$  .....  $هـ^{٩}$ )$$

$$ك = ك \pm ف هـ + (الحدود المشتركة على  $هـ^{١+٢}$   $هـ^{٢+٢}$   $هـ^{٣+٢}$  .....  $هـ^{٩}$ )$$

ومن هنا يؤخذ

$$ع + ك = ع + ك \pm (ع + ١ + ك + ف) هـ + (الحدود الحقيقية المشتركة على  $هـ^{١+٢}$   $هـ^{٢+٢}$   $هـ^{٣+٢}$  .....  $هـ^{٩}$ )$$



للحد ه بأس يزيد عن ح

وحيث أنه قد فرض أن  $ج ه + ك ف =$  فلا يخص غير  $ك ه - ج ف =$ .

لأنه ان كانت كلتا المتساويتين تساوى صفرًا حدث

$(ج ه + ك ف) = (ك ه - ج ف) = ٠$  أو  $(ج + ك) = (ه + ف) = ٠$ .

وبناء عليه يكون  $ج + ك =$  أعني  $ع = ٠$  و  $ك = ٠$  أو  $ه + ف = ٠$ .

أي  $ه = ٠$  و  $ف = ٠$ . وهذا مخالف للفروض المقدمة

ولما كانت الكمية  $ك ه - ج ف$  ليست معدومة أمكن فرض العدد ه

صغيرًا بالكفاية ليكون مجموع  $١١$  و  $١٢$  المشتملة على  $ج ه$  الحد ه في مقدار

$ج + ك$  متحدًا في  $١٣$  اذمة مع الحد الأول الذي هو

$١٤$   $(ك ه - ج ف)$  ه ويمكن أيضًا ان يكون هذا الحد سالبًا لأنه يمكن

لذلك ان يعين و على وجه بحيث يكون  $١٥$   $١٦$  أو  $١٧$

بحسب ما تكون الكمية  $ك ه - ج ف$  سالبة أو موجبة فاذا تخففت

جميع هذه الشروط فانه يحدث

$$١٨ \quad (ج + ك) > (ك ه - ج ف)$$

ويمكن أن يفرض للعدد  $h$  مقدار صغير بالكفاية بحيث يكون مجموع الحدود  
المشتملة على قوى  $h$  في مقدار  $h^2 + k^2$  متعدياً في العلاقة مع  
الحده  $\pm (h + k)$  هو (كانتقدم في ص ١٧٧) ويمكن زيادة على ذلك  
أن يكون هذا الحد سالبا لانه يمكن لذلك تعيين غير المميز و على وجه  
بسيط يكون  $h$  مساويا  $1$  أو  $-1$  بحيث ما تكون القيمة  $h + k$  ك  
سالبة أو موجبة فاذا تحققت جميع هذه الشروط تحصل

$$h + k \geq h^2 + k^2 \text{ ومنها ينتج } h + k \leq h^2 + k^2$$

وجبت فرض أن القيمة  $h + k$  ليست معدومة فيلزم ايضا اختبار  
الحالة التي تكون فيها القيمة  $h + k = 0$ . وذلك بأن يفرض  
لغير المميز في المعادلة (٣) عوضا عن أن يجعل فيها  $h = \pm 1$  مقدار  
به يكون  $h = \pm 1$  وجب أن ينتج أن  $h + k = \pm 1$   
 $\pm (h + k) = \pm (1 + 1) = \pm 2$  ومنها يجد

$$h = 1, k = 1 \text{ أو } h = -1, k = -1$$

وبناء على ذلك يحصل

$$h + k = \pm 1, h = \pm 1, k = \pm 1$$

وجب أن يرى أن الحدود التالية للحد الحقيقيه ومحتوية على قوى



## نسبي بين

اذا كانت الحجة ذات الحد  $س = د$  نشتر الحجة لكثرة الحدود  $س$   
 كان  $د$  جذراً للعادلة  $س = د$  . لانه قد فرض أن  $س = (س - ح)$   
 في وجبت الحاجة  $ح$  تام باليسة الى  $س$  فادجعل في هذه  
 المتدربة  $س = د$  فانظره الثاني بعدم وجبذ يوون الطرف  
 المذكور الى الصفر

## النسبي الى ثمة

واذا جعل  $س = د$  في طرفي المتدربة  $س = (س - ح)$  في  $ق$  فإين  
 نحصل  $(س - ح)$  في يوون الى الصفر وال في ث لا يتغير على أي وجه  
 زيار مقدار الحجة  $ح$  ومن هنا يؤخذ ان الباقي  $ق$  يكون مساوياً المقدار  
 الذي تحت الحجة الكثرة الحدود  $س$  عندما يوضع فيها  $د$  بدل  
 $س$  ولاننا ان هذه قضية نشتر على النظرية السادسة لانه اذا  
 كان  $د$  هو جذر للعادلة  $س = د$  . كان الناتج بعد وضع  $د$  بدل  
 $س$  في  $س$  صفراً وجبذ يكون باقي قسمة  $س$  على  $س - ح$  صفراً  
 ايضا وبناء على ذلك تكون الحجة الكثرة الحدود  $س$  قابلة للقسمة على  
 $س - ح$

## في مضارب المعادلات وقواسمها

### النقطة السادسة

سند إذا كان  $\delta$  هو الجذر الحقيقي لمعادلة كالمعادلة  $\delta =$ . فان الطرف الاول من المعادلة يكون قابلاً للقسمه على البكته ذات الحدين  $\delta - \delta$  ولذا قسم البكته الكيرة الحدود  $\delta$  على  $\delta - \delta$  وحيث أن المقوم عليه يحتوي على  $\delta$  بدرجة اولى فقط فيتوصل بالعمل الى باقي لا يحتوي على هذا المتغير ولا يكون مقام خارج القسمه محتوياً على المتغير .  $\delta$  المذكور فاذا رمن خارج القسمه بالرمز  $\delta$  وللباقي بالرمز  $\delta$   $\delta = (\delta - \delta) \times \delta + \delta$

وفي هذه المتساوية اذا جعل  $\delta = \delta$  انعدم طرفها الاول وحيث أنه قد فرض أن  $\delta$  هو جذر المعادلة  $\delta =$ . فينعدم حاصل الضرب  $(\delta - \delta) \times \delta$  أيضاً لان المضروب  $\delta - \delta$  قد آل الى الصفر ولا يمكن أن يكون المضروب  $\delta$  غير معدوم وأما الباقي  $\delta$  فانه لم يتغير لانه ليس داخل في  $\delta$  فاذا يكون هذا الباقي معدوماً واذا تكون البكته  $\delta$  الكيرة الحدود قابله للقسمه على  $\delta - \delta$

(٣٩١)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|c|c|c}
 \begin{array}{c} 1-m \\ \hline s + \dots + s^{m-1} \end{array} & \begin{array}{c} 2-m \\ \hline s + s^{m-2} \end{array} & \begin{array}{c} 3-m \\ \hline s + s^{m-3} \end{array} & \begin{array}{c} 4-m \\ \hline s + s^{m-4} \end{array} \\
 \begin{array}{c} 2-m \\ \hline s + s^{m-2} \end{array} & \begin{array}{c} 3-m \\ \hline s + s^{m-3} \end{array} & \begin{array}{c} 4-m \\ \hline s + s^{m-4} \end{array} & \begin{array}{c} 5-m \\ \hline s + s^{m-5} \end{array} \\
 \begin{array}{c} 3-m \\ \hline s + s^{m-3} \end{array} & \begin{array}{c} 4-m \\ \hline s + s^{m-4} \end{array} & \begin{array}{c} 5-m \\ \hline s + s^{m-5} \end{array} & \begin{array}{c} 6-m \\ \hline s + s^{m-6} \end{array} \\
 \begin{array}{c} 4-m \\ \hline s + s^{m-4} \end{array} & \begin{array}{c} 5-m \\ \hline s + s^{m-5} \end{array} & \begin{array}{c} 6-m \\ \hline s + s^{m-6} \end{array} & \begin{array}{c} 7-m \\ \hline s + s^{m-7} \end{array} \\
 \dots + \dots & & & \\
 \dots + \dots & & & 
 \end{array}
 \end{array}$$

$$s^m +$$

ومن هنا يتبين أن مكرر كل حد من خارج القسمة يتحصل بالابتداء من الحد الثاني بأن يضرب مكرر الحد السابق عليه في  $s$  ويضاف إلى حاصل الضرب المذكور الذي يشغل في كثيرة الحدود  $s^m + s^{m-1} + s^{m-2} + \dots + s + 1$  مرتبة الحد الذي يراد تحصيله من خارج القسمة ومكرر الحد الأول من خارج القسمة لا يختلف عن مكرر الحد الأول من كثيرة الحدود المفروضة  $s^m + s^{m-1} + s^{m-2} + \dots + s + 1$  ويمكن أيضاً أن ينبه مما كانت الحكمة  $s$  على أن الطرف الأول من المعادلة (١) يكون دائماً مكافئاً للعدد

$$\begin{array}{c}
 s^m - s + s + s^{m-1} - s^{m-1} + s^{m-1} + s^{m-2} - s^{m-2} + s^{m-2} + s^{m-3} - s^{m-3} + s^{m-3} + \dots + s^2 - s^2 + s^2 + s - s + 1 \\
 s^m + s^{m-1} + s^{m-2} + \dots + s + 1
 \end{array}$$

وقد برهن الهندس لاجرايج على النظرية السادسة المذكورة بهذه البرهنة  
وهي اذا فرض أن المعادلة العمومية هي

$$(1) \quad x^m + p x^{m-1} + q x^{m-2} + \dots + m x + n = 0$$

ويكون  $x$  هو الجذر لهذه المعادلة تحصل من ذلك المتساوية

$$x^m + p x^{m-1} + q x^{m-2} + \dots + m x + n = 0$$

فاذا استخرج من هذه المتساوية مقدار  $x$  ووضع في الطرف الأول  
من المعادلة (1) آلت كبيرة الحدود المفروضة الى

$$x^m + p x^{m-1} + q x^{m-2} + \dots + m x + n$$

$$- x^m - p x^{m-1} - q x^{m-2} - \dots - m x - n$$

$$= 0 \quad \text{أو} \quad x^m + p x^{m-1} + q x^{m-2} + \dots + m x + n = 0$$

نكن حيث أن  $x$  يقسم كلا من اليكيات  $x^m - x^{m-1} - \dots - x - 1$  ونلح

فيكون الطرف الأول من المعادلة (1) قابلاً للقسمة على  $x$  ايضاً

ينبغي وبكفي لتحصل خارج القسمة أن تقسم كل من اليكيات ذات الحدود

$x^m - x^{m-1} - \dots - x - 1$  على  $x$  وأن تجمع الخواارج الجزئية

على بعضها بفرض بخارج القسمة الجزئي الثاني في  $x$  والثالث في  $x$

نلح فينتج كل

(٢٩٢)

من ذلك معادلة يكون لها جذر كالجذر  $\delta$  وجنيد تكون الكمية الكبيرة  
الحدود قابلة للقسم على  $\delta$  ويكون الخارج كمية كبيرة الحدود  
درجتها  $m-1$  وبنا على ذلك يحدث

$$\delta = (\delta - \epsilon)(\delta - \zeta)(\delta - \eta) + \dots$$

فاذا جعلت الكمية الكبيرة الحدود  $\delta$  مساوية للصفر فانه  
يتحصل من ذلك معادلة يكون لها جذر كالجذر  $\delta$  وجنيد تكون  
الكمية الكبيرة الحدود المذكورة قابلة للقسم على  $\delta$  ويكون  
خارج القسم كمية كبيرة الحدود درجاتها  $m-1$  وبنا على ذلك يكون

$$\delta = (\delta - \epsilon)(\delta - \zeta)(\delta - \eta) + \dots$$

ويمكن أن يتوالى العمل هكذا حتى لا يكون الخارج محتوياً على المتغير  $\delta$   
الابد رتبة اولى ويكون كمية ذات حدين كالكمية  $\delta - \epsilon$  وجنيد  
تتحلل الكمية الكبيرة الحدود والمفروضة الى مضارب بدرجات اولى  
عدد هـ  $m$  وبنا على ذلك يحدث

$$\delta = (\delta - \epsilon)(\delta - \zeta)(\delta - \eta) \dots (\delta - \theta)$$

وبمقتضى هذا التحليل نشاهد أن الكمية الكبيرة الحدود  $\delta$  تتوالت الى  
الصفر اذا وضع فيها بدل المتغير  $\delta$  واحد من المقادير  $\epsilon, \zeta, \eta, \dots, \theta$  ذلك

(٣٩٤)

وحيث أن هذا المقدار الأخير يكون من جزئين أحدهما قابل للقسمة على  
 س - ح والثاني غير محتو على س فيكون هذا الجذر الثاني  
 كتابة عن باقي قسمة الكمية الكبيرة الحدود المفروضة على س - ح  
 وحينئذ فقد آلت هذه النتيجة إلى المقدمة في النتيجة الثانية  
 وبالمجمل فيمكن هنا إيراد القواعد المقررة في البنود الثلاثة السابقة  
 وذلك بأن نجرى بمقتضى الطرق المعتادة عملية قسمة الكمية الكبيرة  
 الحدود  $س + ح + ن + ك$  على الكمية ذات الحدود  
 س - ح

### النظرية السابعة

يُسمى أي معادلة ذات درجة مربعة لها دائماً جذور حقيقية أو تخيلية  
 لا تزيد عن درجتها المربعة مثلاً إذا فرضت المعادلة  $س = ٠$  نتوهد  
 أن لها بالضرورة جذراً حقيقياً أو تخيلياً فاذا رمز إليه بالرمز ج  
 كان الطرف الأول قابلاً للقسمة على س - ح والخارج كمية كثيرة  
 الحدود درجتها م - ١ وحينئذ يكون

$$س = (س - ح)(ن + ك)$$

فاذا جعلت الكمية الكبيرة  $ن + ك$  مساوية للصفر فإنه يتحصل  
 من



(٣٩٤)

التي تعددها  $m$  وبأعلى ذلك يكون للمعادلة  $٣ = ٠$  جذور عددها  $m$   
ولا يكون لها جذور غير الجذور  $٠, ١, ٢, ٣, \dots, m$  التي تعددها  $m$   
لأنه إن كان لها غير هذه الجذور أمكن تحليل البكبة الكثيرة الحدود  $٣$   
إلى مجمل من المضارب التي بدرجة أولى وهذا محال (كما في ص ١٧٤)  
ويمكن أن تكون بعض المضارب  $٣ - ٢, ٣ - ١, ٣ - ٠, ٣ - ٣, \dots$  متساوية  
وفي هذه الحالة تكون جذور المعادلة  $٣ = ٠$  متساوية مثلاً إذا كانت  
البكبة الكثيرة  $٣$  محتوية على ثلاثة مضارب كل واحد منها يساوي  
 $٣ - ٢$  فإن كل واحد من جذورها الثلاثة يكون مساوياً للضروب  
 $٢$  ولذا يقال أن أي بكبة درجتها  $m$  يكون لها جذور عددها  $m$   
ببند ويمكن البرهنة بقطع النظر عن النظرية المتقدمة (في ص ١٧٤) على  
أن أي معادلة بدرجة  $m$  لا يكون لها جملة واحدة من الجذور عددها  $m$   
مثلاً لتفرض المتساوية

$$٣ = (٣ - ٢)(٣ - ١)(٣ - ٠) \dots (٣ - ٢)$$

فإذا فرض فيها للتغير  $٣$  مقدار المقدار  $٢$  يختلف عن كل واحدة  
من البكبات  $٢, ١, ٠, ٢, \dots, ٢$  يقال حيث أنه لا ينعلم أي مضروب  
من مضارب الطرف الثاني فلا ينعلم حاصل ضرب هذه المضارب  
وجبت



لكن حيث أن لـ = ١ جذر المعادلة باعترض فياخذ  
المقدار ج + ك = ٢ مساوياً للمعادلة وها هو خذ أن ج = ٠  
ك = ٠ فاذا يكون ج - ك = ٢ مساوياً أيضاً لمعادلة ويكون  
لـ = ٢ جذراً للمعادلة .

## نتیجہ اول

الجدور الخليلية يكون عدد هاز وجياني في عدد مكررا في حقيقة

المضارب المطابقة للجدول الانتخابية لأن معادلة تكرارها حقيقية  
تتضمن فيها مضارب حقيقية. حقوقا غير المتغيرة من درجة دائمة  
لأنه ما كان المضروبان مطابقان جيدتين غير متساويتين. (س-ن) ٣  
٥ س-ن + ٤ س-ن كان حاصل ضرب ودين المضروبين هو  
(س-ن) + ٤ س-ن أو ٥ س-ن + ٤ س-ن  
ومن هنا يؤخذ أن الطرف الأيمن من معادلة زوجية الدرجة ونظيره  
للكثرات يتحلل دائما إلى مضارب حقيقية بدرجة دائمة  
إن كانت المعادلة فردية الدرجة كان لها بالضرورة مضروب

(٣٩٩)

(في س) أن القيمة الكثرة الحدود تقبل القيمة على القواسم المتبقية

من هذه التوافق وجب أن يكون عدد قواسم الدرجة الثانية س  $\frac{م(١-٢)}{١٠٠٠}$

وعدد قواسم الدرجة الثالثة  $\frac{م(١-٢)(١-٣)}{١٠٠٠٠}$  و

النظرية الثامنة

يحيى إذا كان لمعادلة حقيقية المكررات جذر شبيه بجذر لـ  $١-٢$

فانه كون لها ايضا جذر كالجذر لـ  $١-٣$

فاذا وضع لـ  $١-٢$  بدل س في المعادلة الأولى من هذه المعادلات

فان الحدود المحتوية على القيمة  $١-٢$  المرفوعة الى القوة زوجية تكون

محمدة عن اندلالة التخيلية  $١-٣$  وهذه الاندلالة تكون باقية على حالها

في سائر الحدود المحتوية على القيمة  $١-٢$  المرفوعة الى قوة فردية

بحيث اذا مرلناج بعد الوضع بالرمز  $١-٣$  كانت  $١-٣$  كانت  $١-٣$

كيتين حقيقيين والقيمة  $١-٣$  محتوية على  $١-٣$  زوجية فقط لكون

س والقيمة  $١-٣$  على قوى فردية للقيمة  $١-٣$  المذكورة

فاذا وضع في لمعادلة المذكورة لـ  $١-٣$  بدل س فان الناتج

المتحصل لا يختلف عن المتقدم الا باختلاف علامات القوى الفردية

للقيمة  $١-٣$  وجب أن يوضع الناتج المذكور هكذا  $١-٣$   $١-٣$

لكن حيث



(٣٩١)

حقيقى بدرجة اولى (كافى سند) ونقسمها على هذا المضروب توؤل الى  
معادلة زوجية الدرجة .

فى الارتباطات الواقعة بين مكررات المعادلة وجزوها  
النظرية التاسعة

سند حيث أن مكررا على قوة للجموع هو الواحد فى المعادلة المحولة الى الصورة  
$$x^2 + ax + b = 0$$

فيكون مكرر الحد الثانى المأخوذ بعلامة مخالفة لعلامته ساويا  
لجميع الجذور ومكرر الحد الثالث ساويا لجموع حواصل ضرب الجذور  
مأخوذة مثنى ومكرر الحد الرابع المأخوذ بعلامة مخالفة لعلامته  
ساويا لجموع حواصل ضرب الجذور مأخوذة ثلاث ومكرر الحد  
الأخير المأخوذ بعلامته ان كانت درجة المعادلة زوجية وعلامة  
مخالفة لعلامته ان كانت درجتها فردية ساويا لحاصل ضرب  
جميع الجذور

مثلا اذ جعلت  $x, y, z, \dots, k$  رموز الجذور ومعادلة عددها  $n$   
فيكون طرفها الأول ساويا لحاصل الضرب

$(x-y)(y-z)(z-k) \dots (x-k)$

وجب

(١-٤)

وبوضع ص - ر بدل س في المعادلة (١) تتحصل المعادلة المطلوبة  
لانه يحدث بعد الاستبدال

$$(ص - ر) + ح + (ص - ر) + د + (ص - ر) + ه + ... = ك + ... (٤)$$

وهذه المعادلة يتحقق الشرط المفروض لان الناتج الحادث  
من وضع ح بدل س في المعادلة (١) لا يختلف عن الناتج الحادث  
من وضع د + ر بدل ص في المعادلة (٤) وبناءً على ذلك اذا كان  
ح جذراً من جذور المعادلة الاولى كان ح + ر جذراً من جذور المعادلة  
الثانية

ويمكن ايضاً التوصل الى هذا الناتج بواسطة وضع الطرف الاول  
من المعادلة على صورة حاصل ضرب مضارب بدرجة اولى  
لانه لا فرق أن ح، د، ه، ... ك هي الجذور كان الطرف  
الاول المذكور مكافئاً لحاصل الضرب

$$(س - ح)(س - د)(س - ه) ... (س - ك)$$

فاذا وضع س - ر بدل س فان هذا الحاصل يتحول الى

$$[ص - (ح + ر)][ص - (د + ر)][ص - (ه + ر)] ... [ص - (ك + ر)]$$

وحينئذ تكون جذور المعادلة المحولة بعد الاستبدال هي ح + ر، د + ر، ه + ر، ...



(٤٠٣)

$$m = m - \frac{1}{m}$$

وعلى ذلك يلزم لتحويل معادلة الى اخرى تنقص عنها الحد الثاني  
أن يوضع بدل المجهول  $m$  بمجهول آخر  $m$  يضاف اليه المكرر  $\frac{1}{m}$   
من الحد الثاني في المعادلة المفروضة مأخوذاً بعلامة مخالفة لعلامة  
ومقوماً على درجة المعادلة فتكون جذور المعادلة المحولة مساوية  
لجذور المعادلة المفروضة مضافاً اليها  $\frac{1}{m}$

ويهل بواسطة الخواص المقررة في شأن تركيب المكررات مع الجذور  
توضيح القاعدة السابقة لأن الجذور اذا اضيف اليها  $\frac{1}{m}$  زاد  
مجموعها بمقدار  $m \times \frac{1}{m}$  أى بمقدار  $1$  وحيث أن هذا المجموع  
كان يساوى في مبدأ الأمر  $-a$  فيكون مجموع جذور المعادلة الجديدة  
ساوياً للصفر وبناءً على ذلك يكون مكرر الحد الثاني معدوماً

واذا اريد حذف الحد الثالث من المعادلة (٤) يجعل مكرراً مساوياً  
للصفر فتكون من ذلك معادلة بدرجة ثانية يؤخذ منها مقداران  
لللمية  $r$  واذا حذف الحد الرابع نتجت من ذلك معادلة بدرجة ثالثة  
والخ  $\dots$  واذا حذف الحد الأخير كانت المعادلة التي يطلب حلها مناسبة  
للمعادلة المفروضة

(٤٠٤)

سواء مما إذا اريد تعيين جميع جذور المعادلة (١) بكمية واحدة فان ذلك لا يختلف عما نحن بصدد الاثبات واحد وهو أن  $r$  تكون كمية سالبة وجنيد اذا وضعت هذه الكمية بالصورة  $-r$  آت المعادلة المذكورة بعد التحويل الى

$$(ص + r)^0 + (ص + r)^1 + (ص + r)^2 + \dots + (ص + r)^{m-1} = 0 \quad (٣)$$

وهذا التحويل يستعمل في تغيير معادلة بأخرى لا تكون محتوية على قوة معينة للجذور وتحليل القوى المتنوعة للكمية ذات الحدين  $ص + r$

في المعادلة (٣) توول هذه المعادلة الى

$$1. = \begin{vmatrix} ص + r & ص + r^2 + \dots + (ص + r)^{m-1} \\ 1 & ص + r \\ 0 & ص + r^2 + \dots + (ص + r)^{m-1} \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

واذا اريد جعل هذه الكمية غير محتوية على القوة  $m-1$  للمتغير  $ص$  فانه

$$\text{يلزم أن يكتب } ص + r = -\frac{r}{m} \text{ ومنه ينتج } r = -\frac{r}{m}$$

وحينئذ يوول القانون  $ص + r = -\frac{r}{m}$  الى

$$= -\frac{r}{m}$$



وہذا بندوبست ہے

$$(x-1)^{-1} = 0, (x-1)^{-2} = 0, \dots = 0, \dots = 0$$

وحيث يشاهد أنه ترد من المعاداة المحولة كل من الحدين  $\sqrt{3}$  و  $\sqrt{2}$

لكنه لا يمكن في جميع الأحوال حذف، عند حدود من معادلة نقطة أحد قيعي

فقد وجد من عددوها كما ان الله من اعاد الله عدد واريه حقه

أحد الحدود موجودة بيننا

و نیز بنحوی که در این صورت بنده را از این جهت که در این

1. 1944. 1945. 1946. 1947. 1948. 1949. 1950. 1951. 1952. 1953. 1954. 1955. 1956. 1957. 1958. 1959. 1960. 1961. 1962. 1963. 1964. 1965. 1966. 1967. 1968. 1969. 1970. 1971. 1972. 1973. 1974. 1975. 1976. 1977. 1978. 1979. 1980. 1981. 1982. 1983. 1984. 1985. 1986. 1987. 1988. 1989. 1990. 1991. 1992. 1993. 1994. 1995. 1996. 1997. 1998. 1999. 2000. 2001. 2002. 2003. 2004. 2005. 2006. 2007. 2008. 2009. 2010. 2011. 2012. 2013. 2014. 2015. 2016. 2017. 2018. 2019. 2020. 2021. 2022. 2023. 2024. 2025. 2026. 2027. 2028. 2029. 2030. 2031. 2032. 2033. 2034. 2035. 2036. 2037. 2038. 2039. 2040. 2041. 2042. 2043. 2044. 2045. 2046. 2047. 2048. 2049. 2050. 2051. 2052. 2053. 2054. 2055. 2056. 2057. 2058. 2059. 2060. 2061. 2062. 2063. 2064. 2065. 2066. 2067. 2068. 2069. 2070. 2071. 2072. 2073. 2074. 2075. 2076. 2077. 2078. 2079. 2080. 2081. 2082. 2083. 2084. 2085. 2086. 2087. 2088. 2089. 2090. 2091. 2092. 2093. 2094. 2095. 2096. 2097. 2098. 2099. 2100. 2101. 2102. 2103. 2104. 2105. 2106. 2107. 2108. 2109. 2110. 2111. 2112. 2113. 2114. 2115. 2116. 2117. 2118. 2119. 2120. 2121. 2122. 2123. 2124. 2125. 2126. 2127. 2128. 2129. 2130. 2131. 2132. 2133. 2134. 2135. 2136. 2137. 2138. 2139. 2140. 2141. 2142. 2143. 2144. 2145. 2146. 2147. 2148. 2149. 2150. 2151. 2152. 2153. 2154. 2155. 2156. 2157. 2158. 2159. 2160. 2161. 2162. 2163. 2164. 2165. 2166. 2167. 2168. 2169. 2170. 2171. 2172. 2173. 2174. 2175. 2176. 2177. 2178. 2179. 2180. 2181. 2182. 2183. 2184. 2185. 2186. 2187. 2188. 2189. 2190. 2191. 2192. 2193. 2194. 2195. 2196. 2197. 2198. 2199. 2200. 2201. 2202. 2203. 2204. 2205. 2206. 2207. 2208. 2209. 2210. 2211. 2212. 2213. 2214. 2215. 2216. 2217. 2218. 2219. 2220. 2221. 2222. 2223. 2224. 2225. 2226. 2227. 2228. 2229. 2230. 2231. 2232. 2233. 2234. 2235. 2236. 2237. 2238. 2239. 2240. 2241. 2242. 2243. 2244. 2245. 2246. 2247. 2248. 2249. 2250. 2251. 2252. 2253. 2254. 2255. 2256. 2257. 2258. 2259. 2260. 2261. 2262. 2263. 2264. 2265. 2266. 2267. 2268. 2269. 2270. 2271. 2272. 2273. 2274. 2275. 2276. 2277. 2278. 2279. 2280. 2281. 2282. 2283. 2284. 2285. 2286. 2287. 2288. 2289. 2290. 2291. 2292. 2293. 2294. 2295. 2296. 2297. 2298. 2299. 2300. 2301. 2302. 2303. 2304. 2305. 2306. 2307. 2308. 2309. 2310. 2311. 2312. 2313. 2314. 2315. 2316. 2317. 2318. 2319. 2320. 2321. 2322. 2323. 2324. 2325. 2326. 2327. 2328. 2329. 2330. 2331. 2332. 2333. 2334. 2335. 2336. 2337. 2338. 2339. 2340. 2341. 2342. 2343. 2344. 2345. 2346. 2347. 2348. 2349. 2350. 2351. 2352. 2353. 2354. 2355. 2356. 2357. 2358. 2359. 2360. 2361. 2362. 2363. 2364. 2365. 2366. 2367. 2368. 2369. 2370. 2371. 2372. 2373. 2374. 2375. 2376. 2377. 2378. 2379. 2380. 2381. 2382. 2383. 2384. 2385. 2386. 2387. 2388. 2389. 2390. 2391. 2392. 2393. 2394. 2395. 2396. 2397. 2398. 2399. 2400. 2401. 2402. 2403. 2404. 2405. 2406. 2407. 2408. 2409. 2410. 2411. 2412. 2413. 2414. 2415. 2416. 2417. 2418. 2419. 2420. 2421. 2422. 2423. 2424. 2425. 2426. 2427. 2428. 2429. 2430. 2431. 2432. 2433. 2434. 2435. 2436. 2437. 2438. 2439. 2440. 2441. 2442. 2443. 2444. 2445. 2446. 2447. 2448. 2449. 2450. 2451. 2452. 2453. 2454. 2455. 2456. 2457. 2458. 2459. 2460. 2461. 2462. 2463. 2464. 2465. 2466. 2467. 2468. 2469. 2470. 2471. 2472. 2473. 2474. 2475. 2476. 2477. 2478. 2479. 2480. 2481. 2482. 2483. 2484. 2485. 2486. 2487. 2488. 2489. 2490. 2491. 2492. 2493. 2494. 2495. 2496. 2497. 2498. 2499. 2500. 2501. 2502. 2503. 2504. 2505. 2506. 2507. 2508. 2509. 2510. 2511. 2512. 2513. 2514. 2515. 2516. 2517. 2518. 2519. 2520. 2521. 2522. 2523. 2524. 2525. 2526. 2527. 2528. 2529. 2530. 2531. 2532. 2533. 2534. 2535. 2536. 2537. 2538. 2539. 2540. 2541. 2542. 2543. 2544. 2545. 2546. 2547. 2548. 2549. 2550. 2551. 2552. 2553. 2554. 2555. 2556. 2557. 2558. 2559. 2560. 2561. 2562. 2563. 2564. 2565. 2566. 2567. 2568. 2569. 2570. 2571. 2572. 2573. 2574. 2575. 2576. 2577. 2578. 2579. 2580. 2581. 2582. 2583. 2584. 2585. 2586. 2587. 2588. 2589. 2590. 2591. 2592. 2593. 2594. 2595. 2596. 2597. 2598. 2599. 2600. 2601. 2602. 2603. 2604. 2605. 2606. 2607. 2608. 2609. 2610. 2611. 2612. 2613. 2614. 2615. 2616. 2617. 2618. 2619. 2620. 2621. 2622. 2623. 2624. 2625.

*[Faint handwritten notes at the bottom of the page]*

*[Faint handwritten notes at the bottom of the page, mostly illegible.]*

*[Faint handwritten notes at bottom left]*

[illegible]

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$

*[Handwritten notes and sketches on lined paper]*

(٤٠٤)

وهذا واضح لانه متى انعدم الحد الأخير من المعادلة (٤) كان أحد جذور هذه المعادلة مساوياً للصفر وحيث أن هذه الجذور هي عين جذور المعادلة المفروضة مطروحاً من كل واحد منها فلكي ينعدم أحدها يلزم أن تكون البكّة المذكورة جذراً من جذور المعادلة المفروضة

سند ولنمثل الحد الثاني بمثال هو لنفرض المعادلة

$$ش + ٥ ش + ش^٣ - ش^١٦ - ش^٢٠ - ش^١٦ = ٠ \dots\dots (٥)$$

ثم بوضع فيها ص = بدل ش فنحصل الى المعادلة

$$ص - ٩ ص + ص^٣ - ٩ = ٠$$

وهذه المعادلة يمكن وضعها بالصورة

$$(ص - ٩)(ص + ١) = ٠$$

وحيث يشاهد انها قد انقسمت الى جزئين هما

$$ص - ٩ = ٠ \quad و \quad ص + ١ = ٠$$

نأما الجزء الأول فيحصل منه  $ص = ٩$  و  $ص = -١$  وأما الثاني

فيحدث منه بمقتضى ما تقدم في (سند)

$$ص = ١ \quad و \quad ص = \frac{١}{٤} (١ + \sqrt{-٣}) \quad و \quad ص = \frac{١}{٤} (١ - \sqrt{-٣})$$

من هنا يؤخذ أنه يكون للمعادلة (٥) ثلاثة جذور اثنين منها تخيليا



فان كان م دالاً على عدد زوجي فانه يترتب على وضع - ص بدل  
 من تغيير علامات سائر الحدود الزوجية المرتبة بالابتداء من  
 الحد الأول أما الحدود الفردية المرتبة فلا تتغير علاماتها وان كان  
 م دالاً على عدد فردي فانه يترتب على ذلك تغيير علامات الحدود  
 الفردية امرنة أما الحدود الزوجية فلا تتغير علاماتها ويجب  
 يلزم لكي يكون الحد الأول موجباً ان تغير علامات سائر الحدود في  
 المعادلة الناتجة وينتج من ذلك أن تغيير علامات جذور معادلة  
 بعد ان توضع فيها التصريقات الحدود والناقصة منها  
 ويجعل الصفر مكرراً للحد من هذه الحدود ولا يحصل  
 الا بقية تغيير علامات الحدود الزوجية المرتبة فقط  
 بعد اذ كانت جميع حدود المعادلة المحولة الى الصورة الاعتيادية  
 متحدة في العلامة فلا تكون محبوبة على جذر موجب لانه يحدث  
 من وضع مقدار موجب بدل من في الطرف الأول من المعادلة جملة  
 من الكميات الموجبة لا يمكن أن تكون معدومة  
 هذه الملاحظة يؤخذ منها هي القاعدة المقررة في شأن تغيير  
 لعلامات الجذور ان المعادلة التامة التي تكون حدودها موجبة ومالبة

(٤٠٩)

ش - ٣ ش - ٤ ش + ش - س - ١ = ٠

تحتوي على ثلاث مغايرات هي واحدة بين الحد الأول والثاني وواحدة بين الثالث والرابع وواحدة بين الرابع والخامس وعلى مداومتين احدهما بين الحد الثاني والثالث والاخرى بين الخامس والسادس ومن البديهي فكل معادلة تامة ان عدد المغايرات والمداومات يساوي درجة هذه المعادلة

والنظرية المعروفة بقاعدة العلامات للعلم ديكارت لا تنج عن هذه النظرية

### النظرية العاشرة

ينبغي لا يلزم في كل معادلة تامة أو غير تامة ان عدد الجذور الموجبة يزيد عن عدد المغايرات

فاذا فرض في مبداء الأمر أنه قد تحصل حاصل ضرب المضارب المطابقة لكل من الجذور التخيلية والسالبة للمعادلة فانه يلزم لتحصيل الطرف الأول من هذه المعادلة ان يضرب على التوالي الحاصل المذكور في جميع المضارب المطابقة للجذور الموجبة وجنبد لا تتحقق هذه النظرية الا اذا شوهد عند ضرب كمية كثيرة الحدود في مضروب كالمنصوب

(٤٠٨)

فاذا كان كل اثنين من جذور معادلة منا وبين وتخالعين في العلامة  
فان المعادلة لا تشتمل الا على قوى زوجية بل ليس وتذايقا لحيث ان  
المجذور مبينة هكذا

$+ + - - , + + , - - , + + , - -$  ركني

فيكون الطرف الأول من المعادلة كناية عن حاصل ضرب المضارب

$- + - + , - + , - + , - + , - +$  و لكن

المساوي لحاصل ضرب المضارب ذات درجة الثانية

$- + , - + , - + , - + , - +$  و لكن

ولما كانت هذه المضارب لا تحتوي الا على قوى زوجية بل ليس  
كان حاصل ضربها كذلك

ش ق ا عدة العلامات للمعجم ديكارست

بنيدي اذ فرضت جملة حدود مسبقة بالعلامتين  $+ , -$  اطلق

على تغيير العلامات لحاصل من جذر الى تاليه اسم المفايرق واذا لم يغير

على تحدين انتوا بين تغيير في العلامة اطلق على ذلك اسم المداومة

منه لعمارة



... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

... ..

يحدث

|                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| $1 + 2 + \dots + n$ | $1 + 2 + \dots + n$ | $1 + 2 + \dots + n$ |
| -                   | +                   | -                   |

... ..

... ..



(١٤٢)

ويشاهد ايضاً بمقتضى النظريتين المقررتين (في بندى ١٣٠، ١٣١) انه يلزم ان يكون الحد الأخير من حاصل ضرب المضارب المطابقة للجذور السالبة والتجيلية موجباً وبتأعلى ذلك اذا كان هذا الحاصل محتوياً على مغايرات فلا تكون الا زوجية العدد وحيث أن كل واحد من المضارب المطابقة للجذور الموجبة يشتمل على عدد فردى من المغايرات فان كان عدد المغايرات اكبر من عدد الجذور الموجبة فإنه يكون أكبر مرتبة بعدد زوجي

ويستدرك ان علامات جذور معادلة تتغير كلها عند وضع  
المتغير في صورة من النظرية السابقة ان عدد الجذور  
سواء ايجابية او سالبة يزيد عن عدد مغايرات المعادلة المحولة التي  
تشتق من وضع  $x$  بدل  $y$

ان كانت المعادلة تامة فإنه لا يترتب على وضع  $-x$  بدل  $x$   
تغير علامات الحدود الزوجية المرتبة (كما في بندى ١٣٢)  
بمعنى ذلك توول المغايرات الى مداومات وبالعكس وحيث  
يتبين في معادلة تامة ان يكون عدد الجذور السالبة أكبر من عدد  
المداومات



من حدود متوالية عددها  $1 + 8$  كالتسلسلة  $\pm 7 \pm 8 \pm 1$   
 $\pm 8 \pm 7 \pm 1$  ط  $8-7$

فانه يتحصل من هذه الحدود التسلسلة في المعادلة المفروضة وفي  
 المعادلة المحولة مغايرات عددها  $7$  فان قطع النظر عن سائر حدود  
 هذه التسلسلة ما عدا احدها الأول وهو  $\pm 7$  والآخر وهو  
 $\pm 8-7$  يقول من ذلك حالتان متباينتان احدهما الحالة التي  
 يكون فيها  $7$  زوجيًّا والثانية التي يكون فيها  $7$  فرديًّا  
 فاذا وضع في الحالة الاولى - س بدل س في المعادلة  
 فاما ان تغير علامة الحدين  $\pm 7$  و  $\pm 8-7$  وإمات  
 لا تغير وبناءً على ذلك ان تخالف هذان الحدان في العلامة تحصل  
 منها في المعادلة المفروضة والمحولة مغايرتان وان اتخذا في العلامة  
 فلا يتحصل منهما مغايرة ما واذا وضع في الحالة الثانية  
 - س بدل س في المعادلة فانه علامة أحدهما الحدين المذكورين  
 لا تغير وأما علامة الآخر فانهما تتغير وبناءً على ذلك ان تحصل  
 منها في المعادلة المفروضة مغايرة فلا يتحصل منهما في المحولة مغايرة  
 مثلها وبالعكس

(١٤١)

وهذا لا يتأتى إذا كانت المعادلة غير تامة لأنه إذا افترضت المعادلة  
 $x^2 - 1 = 0$  مثلاً شوهد أنها لا تشمل على مداومة واحدة

مع أنها تشمل على جذر سالب بالأقل (كافي بسند)

سند إذا جعلت  $x$  ومثل العدد مغايرات معادلة  $x^2 - 1 = 0$  رؤا

لعدد مغايرات المعادلة المحولة المتحصلة من وضع  $x$  بدل  $x$

فلا يمكن أن يكون عدد الجذور الحقيقية للمعادلة أكبر من  $2$

وحينئذ إذا كان هذا المجموع أقل من الدرجة  $m$  كما باقى جذور المعادلة

تخيلية

مثلاً لنفرض المعادلة  $x^2 - 1 = 0$  التي يكون فيها  $x = 1$

فإذا وضع فيها  $x$  بدل  $x$  كان  $x = 1$  وحينئذ يكون

$x^2 - 1 = 0$  وبنا على ذلك يكون للمعادلة جذران تخيليان بالأقل

وحيث أن المجموع  $2$  لا يزيد دائماً عن الدرجة  $m$

فإن كان أقل منها فإن الفرق بينهما يكون عدداً زوجياً لأنهما كانت

المعادلة تامة كان المجموع  $2$  مساوياً لعدد المغايرات والمطلوب

المساوى للدرجة  $m$  وحينئذ يلزم اختبار الحالة التي تكون فيها

المعادلة ناقصة بعض عدد وديقال إذا اعتبرت متسلسلة مركبة

نقصت قوة واحدة للتغير من بين حدين متحدين في العلامة كان بين  
 جذور المعادلة جذران تخيليان بالأقل فان نقصت المعادلة قوى  
 متوالية عددها  $8-1$  للتغير من وكان مع عددًا زوجيًا كانت  
 عدد الجذور التخيلية للمعادلة مساويًا بالأقل  $8-2$  متى كانت  
 الحدود التي توجد بينها هذه القوى المحذوفة للتغير من متخالفة  
 في العلامة أو انه يكون مساويًا بالأقل العدد في متى كانت الحدود  
 المذكورة متحدة في العلامة فان كان مع عددًا فرديًا كان للمعادلة  
 بالأقل جذور تخيلية عددها  $8-1$

٥٤٤ متى كانت جميع جذور معادلة حقيقية كان عدد الجذور  
 الموجبة مساويًا لعدد المغيرات الموجودة في المعادلة وعدد الجذور  
 السالبة مساويًا لعدد المغيرات الموجودة في المعادلة المحولة للتحصل  
 من وضع  $-x$  بدل  $x$

لانه اذا جعلت رمز العدد الأول من المغيرات  $x$  رمز  
 العدد الثاني منها  $y$  رمز العدد الجذور الموجبة  $z$  رمز  
 لعدد الجذور السالبة  $m$  رمز الدرجة المعادلة في حيث أنت  
 سائر الجذور حقيقية فيكون  $8+2=m$  وحيث أن المجموع  $8+2$

ومن هنا يؤخذ أولاً اذا كان  $g = 2$ ، كافي الحالة التي لم يحذف فيها  
من المعادلة غير حد واحد المجموع  $t + t$  يكون مساوياً للدرجة  $m$   
ان كان الحدان اللذان يوجد بينهما الحد المحذوف متخالفين في العلامة  
ويكون المجموع المذكور مساوياً للدرجة  $m - 2$ ، ان كانا متحدين في العلامة  
وثانياً انه اذا كان  $g$  عدداً زوجياً الاكبر من 2، فبعد حذف  
سائر الحدود المحصورة بين  $\pm j$  و  $\pm i$  و  $\pm i$  و  $\pm j$  يكون  
المجموع  $t + t$  مساوياً للدرجة  $m - (g - 2)$  أو  $m - g$  بحسب  
ما يكون الحدان  $\pm j$  و  $\pm i$  متخالفين في العلامة  
أو متحدين فيها وثالثاً انه اذا كان  $g$  عدداً فردياً فان المجموع  
 $t + t$  يكون بعد حذف الحد والمحصورة بين الحدين  
 $\pm j$  و  $\pm i$  و  $\pm i$  و  $\pm j$  مساوياً للدرجة  $m - g + 1$  وخيراً  
يكون المجموع  $t + t$  في معادلة غير تمامه مساوياً دائماً في النهاية  
لدرجة هذه المعادلة فان كان اقل منها كان الفرق بينهما عدداً زوجياً  
ويشاهد زيادة على ذلك انه اذا نقصت قوة واحدة من قوى  
المتغير بين حدين متخالفين في العلامة وكان المجموع  $t + t$   
مساوياً للدرجة  $m$  أمكن أن تكون سائر الحدود وحقيقية واذا  
نقصت

هما المعروفان بنهايتي الجذور وقد تقدم (في سبيل) انه يوجد دائماً  
عدد يكون كل واحد من مقادير المجهول اكبر منه وانه يترتب على كل  
واحد منها ان الطرف الأول من المعادلة تكون له مقادير متحدة في  
العلامة مع الحد الأول ومن البديهي أن هذا العدد هو النهاية  
الكبرى لجذور المعادلة وبيان الكيفية التي بها يمكن إيجاد هذه  
النهاية يبرهن في مبداء الأمر على ان الحد الأول من المعادلة الذي  
يفرض موجباً يكون اكبر من مجموع الحدود السالبة عند ما يفرض  
التغير من مقدار موجب أو مقدار اكبر منه لانه اذا حولت  
سائر الحدود الموجبة من المعادلة الى طرف ماعد الحد الأول تحصلت  
من ذلك كمية كثيرة الحدود كالكمية

$$x^3 - 4x^2 - 8x - 4$$

فلذا وضعت المتباينة

$$x^3 < 4x^2 + 8x + 4$$

فانه يشاهد انها تتحقق اذا تحصلت المتباينة

$$x^3 < \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{4}{x^3}$$

التي يكون طرفها الثاني صغيراً بقدر ما يكون مقدار المتغير

لا يزيد عن المجموع  $+ ت$  الذى يساوى فى النهاية الدرجة  $م$  فيلزم  
أن يكون

$$ت + ت = م \text{ أو } ت + ت = ع + ح$$

اذا انقر هذا وكان  $ع$  أقل من  $ت$  فانه يلزم أن يكون  $ح < ت$

وهذا مستحيل وجنباذ يكون  $ع = ت$  و  $ح = ت$

فاذا كانت المعادلة تامة فان عدد مغايرات المعادلة المحو يكون

ساويا لعدد مداومات المعادلة المفروضة وفى هذه الحالة اذا

كانت جميع الجذور حقيقية كان عدد الجذور السالبة ماويا

لعدد المداومات

## الباب العاشر

فى البحث عن الجذور الحقيقية للمعادلات الرقمية

ذات المجهول الواحد ونهايات الجذور

سند الطرق التى بها تتعين الجذور الحقيقية لمعادلة هى من الطرق

التحبيبة وأول مسألة توضع لمصر هذه الطرق التحبيبة هوان

يلزم إيجاد عدد دين تكون الجذور محصورة بينهما وهذا ان العدد ان

ها



2017 06 05 14:00

وَصْنُ تَوْبَةٍ بِهَا تَقْرَأُ لِيَا يَاتُ بِحُجْرَةِ السَّمَرَةِ فِي مَدِينَةِ وَجِبْ ثَلَاثَ  
أَنْتَ صَدَى لَذِكْرَهَا تَقْوَا

تفتقر العباد

10.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

التي يرى فيها أن العديتين + و - موضحتان أمام كل من  
حدود هذه المعاداة ما عدا حد ها الأول يعبر من ذلك أن هذه  
الحدود تتكون موجبة وقد تكون سالبة

فنا جبر  
موتی احمد سلطان شاہ کوریا لب و شریف

2021-2022-23

فلما رأى بعض من القضاة انه قد جرى فيه حق القدر من  
العبادة يصير به هذا الاثر من ان يكون من شروق الشمس الى  
ان ياتى التي تقتل عليها المعادة

وحيث أن النكحة الكثيرة أخذود

$p_1 + p_2 + \dots + p_n$  لا تختلف عن القيمة العددية



وحيث أن الحد - ف  $2^{-m}$  هو رتبة سالب وان الحدود التالية له قد تكون موجبة وقد تكون سالبة لذا جعل  $m$  رمزاً للمقدار المطلق لا أكبر مكرر سالب ووضعت المتباينة

$$m < m^{2^{-m}} + m^{2^{-m-1}} + \dots + m^{2^{-m-1}} + m^{2^{-m-1}} + m$$

شاهد أن كل مقدار يفرض للتغير  $m$  ويكون محققاً لهذه المتباينة يُصَبِّرُ الحد الأول  $m^{2^{-m}}$  أكبر من مجموع سائر الحدود السالبة التي توجد في العادلة وحيث أن المتباينة المذكورة تؤول إلى المتباينة

$$m < \frac{m^{1+2^{-m}} - m^{1+2^{-m-1}}}{1 - m^{2^{-m-1}}}$$

فاذا كان لا يبحث عن مقدار المتغير  $m$  الا بين الاعداد التي تزيد عن الواحد فانه يكفي لذلك ان يكون

$$m < \frac{m^{1+2^{-m}} - m^{1+2^{-m-1}}}{1 - m^{2^{-m-1}}} \text{ أو } m^{2^{-m}} (1 - m^{2^{-m-1}}) < m$$

وجنبذا لا يتحقق هذا الشرط الا خيراً لا اذا كان

$$(m-1)^{2^{-m}} (1 - m^{2^{-m-1}}) = \text{أو} < m \text{ أو } (1 - m^{2^{-m-1}}) = \text{أو} < m$$

وبقها ينتج

$$m = \text{أو} < 1 + \frac{1}{m^{2^{-m-1}}}$$

وجنبذا يؤخذ من ذلك ايضاً أنه يلزم لايجاد نهاية كبرى للحدود

الحدود

$$p(1-s + s^2 + \dots + s^{m-1}) \text{ أو } \frac{p(s^m - 1)}{1-s}$$

فيكون وضع المتباينة السابقة هكذا

$$s < \frac{p(s^m - 1)}{1-s}$$

وحيث أن مقدار المتغير  $s$  لا يكون الأعداد التي تزيد عن الواحد كما يفهم ذلك من منطوق المسئلة فيمكن لذلك أن يكتب

$$s = \frac{p}{1-s} \text{ أو } s < \frac{p}{1-s}$$

ومن هنا ينتج

$$s - 1 = \frac{p}{1-s} \text{ أو } s < 1 + p$$

وبناء على ذلك يؤخذ من هنا أنه يلزم لتعيين النهاية الكبرى للحدود الموجبة لكل معادلة ازيضا في الواحد المقدار المطلق لأكبر مكرر سالب

سند إذا كانت الحدود والسالبة لا تبدأ بعد الحد الأول مباشرة

أمكن تحصيل نهاية أصغر من النهاية السابقة

ولبيان ذلك تفرض المعادلة

$$s - \dots - f s^m \pm g s^{m-2} \pm \dots \pm k = 0$$

حيث

(كافي س٤٩) فلاذ لا يكون للمعادلة المفروضة  $\delta$  (س) = جذراً أكبر من  $\epsilon$  وإذا يكون هذا العدد هو النهاية الكبرى للجذور الموجبة للمعادلة  $\delta$  (س) = .

ولتحصيل عدد كالعدد  $\epsilon$  به نصيب جميع الدالات  $\delta$  (س) و  $\delta$  (س) و  $\delta$  (س) موجبة تعتبر في مبداء الأمور المشتقة ذات المرتبة م-١ التي لا تشمل على المتغير  $\delta$  من الابدوجة اولى ثم يعين لهذا المتغير مقدار يُصَيَّرُها موجبة ثم يوضع هذا المقدار في المشتقة ذات المرتبة م-١، فان كان الناتج المتحصل سالباً فانه يلزم أن يزداد مقدار المتغير  $\delta$  عن أصله واحداً فواحداً وهكذا بطريق التوالى الى ان يتوصل الى عدد يتحصل منه ناتج موجب ثم يتوالى العمل بهذه المثابة في الدالات المتوالية الى الدالة  $\delta$  (س)

فاذا كان عدد كالعدد  $\epsilon$  يُصَيَّرُ المشتقات موجبة من ابتداء المشتقة ذات المرتبة م-١ الى المشتقة ذات المرتبة م وأضيف هذا العدد بالتوالى واحداً وعدة احدى حتى نوصر الى المشتقة ذات المرتبة م-١ فـ فـ تكون موجبة يلزم أن فـ يتحقق ان المقدار الجديد الذي يفرض للمتغير  $\delta$  يُصَيَّرُ آثر المشتقات

الموجبة الزائدة إلى الواحد جذر المقدار المطلق لا كبر المكررات  
 السالبة الذي تكون درجته هي الفاصل بين درجة المعادلة  
 وأساس واحد سالب

### تنبيه

إذا كان الكور  $m$  أصغر من الواحد فإن النهاية  $a + m$  تؤثر  
 في الجذر على النهاية المتصلة بواسطة القاعدة السابقة  
 به. ويمكن أيضاً تحصيل نهاية كبرى للجذور الموجبة بطريقة العلم  
 فو تون وهي

انه إذا فرضت المعادلة  $x = 0$ . وأريد تحصيل معادلة أخرى  
 حقيقية لجذور لا تختلف جذورها عن جذور المعادلة المفروضة  
 إلا أن يكون كل واحد منها يتقص من نظيره بحكمة واحدة كالبحكمة  $c$   
 لزم أن يوضع  $x = c - c$  ومنها يؤخذ أن  $x = c + c$   
 تكون المعادلة المحولة  $x = (c + c)$ . أو

$$x^3 + (c)x^2 + (c)x + \frac{c^3}{2 \times c \times c} (c) = x^3 + \frac{c^3}{c \times c} (c) = x^3 + c^2 = 0$$

إذا تقر هذا وتعين العدد  $c$  على وجه بحيث تكون جميع حدود  
 المعادلة السابقة موجبة فإنه لا يكون لهذه المعادلة جذر موجب  
 (كلمة)

فأذا جرى هذا التصويت فليكتبوا في كل ورقة اسم من كان له حق الانتخاب  
للتبعية التي هي لتجديدها ويريدون أن يكونوا في كل ورقة اسم من كان له حق الانتخاب  
بعد أن يسم في الجموع العامة من بين هذه الفئة اسم من كان له حق الانتخاب  
مخالفة لعلامة الحد الأخير من المادة

وتحصل نهايات الجذور انانية بهذه الكيفية وهي ان يوضع في قاعدة  
- س بدل س ويبحث بعد التحويل عن نهايات الجذور الموجبة  
لهذه التمامة

سبب ويقتضي غالباً في البيع من هذه النهايات اتحاد الموجبة الداخلة  
في أي معادلة كما في الأمثلة الآتية وعج

التي يمكن وضعها بصورة

٧ (س-٤) + (١١-١٢) + (١٢-١٣) + (١٣-١٤) + (١٤-١٥) + (١٥-١٦) + (١٦-١٧) + (١٧-١٨) + (١٨-١٩) + (١٩-٢٠) + (٢٠-٢١) + (٢١-٢٢) + (٢٢-٢٣) + (٢٣-٢٤) + (٢٤-٢٥) + (٢٥-٢٦) + (٢٦-٢٧) + (٢٧-٢٨) + (٢٨-٢٩) + (٢٩-٣٠) + (٣٠-٣١) + (٣١-٣٢) + (٣٢-٣٣) + (٣٣-٣٤) + (٣٤-٣٥) + (٣٥-٣٦) + (٣٦-٣٧) + (٣٧-٣٨) + (٣٨-٣٩) + (٣٩-٤٠) + (٤٠-٤١) + (٤١-٤٢) + (٤٢-٤٣) + (٤٣-٤٤) + (٤٤-٤٥) + (٤٥-٤٦) + (٤٦-٤٧) + (٤٧-٤٨) + (٤٨-٤٩) + (٤٩-٥٠) + (٥٠-٥١) + (٥١-٥٢) + (٥٢-٥٣) + (٥٣-٥٤) + (٥٤-٥٥) + (٥٥-٥٦) + (٥٦-٥٧) + (٥٧-٥٨) + (٥٨-٥٩) + (٥٩-٦٠) + (٦٠-٦١) + (٦١-٦٢) + (٦٢-٦٣) + (٦٣-٦٤) + (٦٤-٦٥) + (٦٥-٦٦) + (٦٦-٦٧) + (٦٧-٦٨) + (٦٨-٦٩) + (٦٩-٧٠) + (٧٠-٧١) + (٧١-٧٢) + (٧٢-٧٣) + (٧٣-٧٤) + (٧٤-٧٥) + (٧٥-٧٦) + (٧٦-٧٧) + (٧٧-٧٨) + (٧٨-٧٩) + (٧٩-٨٠) + (٨٠-٨١) + (٨١-٨٢) + (٨٢-٨٣) + (٨٣-٨٤) + (٨٤-٨٥) + (٨٥-٨٦) + (٨٦-٨٧) + (٨٧-٨٨) + (٨٨-٨٩) + (٨٩-٩٠) + (٩٠-٩١) + (٩١-٩٢) + (٩٢-٩٣) + (٩٣-٩٤) + (٩٤-٩٥) + (٩٥-٩٦) + (٩٦-٩٧) + (٩٧-٩٨) + (٩٨-٩٩) + (٩٩-١٠٠) + (١٠٠-١٠١) + (١٠١-١٠٢) + (١٠٢-١٠٣) + (١٠٣-١٠٤) + (١٠٤-١٠٥) + (١٠٥-١٠٦) + (١٠٦-١٠٧) + (١٠٧-١٠٨) + (١٠٨-١٠٩) + (١٠٩-١١٠) + (١١٠-١١١) + (١١١-١١٢) + (١١٢-١١٣) + (١١٣-١١٤) + (١١٤-١١٥) + (١١٥-١١٦) + (١١٦-١١٧) + (١١٧-١١٨) + (١١٨-١١٩) + (١١٩-١٢٠) + (١٢٠-١٢١) + (١٢١-١٢٢) + (١٢٢-١٢٣) + (١٢٣-١٢٤) + (١٢٤-١٢٥) + (١٢٥-١٢٦) + (١٢٦-١٢٧) + (١٢٧-١٢٨) + (١٢٨-١٢٩) + (١٢٩-١٣٠) + (١٣٠-١٣١) + (١٣١-١٣٢) + (١٣٢-١٣٣) + (١٣٣-١٣٤) + (١٣٤-١٣٥) + (١٣٥-١٣٦) + (١٣٦-١٣٧) + (١٣٧-١٣٨) + (١٣٨-١٣٩) + (١٣٩-١٤٠) + (١٤٠-١٤١) + (١٤١-١٤٢) + (١٤٢-١٤٣) + (١٤٣-١٤٤) + (١٤٤-١٤٥) + (١٤٥-١٤٦) + (١٤٦-١٤٧) + (١٤٧-١٤٨) + (١٤٨-١٤٩) + (١٤٩-١٥٠) + (١٥٠-١٥١) + (١٥١-١٥٢) + (١٥٢-١٥٣) + (١٥٣-١٥٤) + (١٥٤-١٥٥) + (١٥٥-١٥٦) + (١٥٦-١٥٧) + (١٥٧-١٥٨) + (١٥٨-١٥٩) + (١٥٩-١٦٠) + (١٦٠-١٦١) + (١٦١-١٦٢) + (١٦٢-١٦٣) + (١٦٣-١٦٤) + (١٦٤-١٦٥) + (١٦٥-١٦٦) + (١٦٦-١٦٧) + (١٦٧-١٦٨) + (١٦٨-١٦٩) + (١٦٩-١٧٠) + (١٧٠-١٧١) + (١٧١-١٧٢) + (١٧٢-١٧٣) + (١٧٣-١٧٤) + (١٧٤-١٧٥) + (١٧٥-١٧٦) + (١٧٦-١٧٧) + (١٧٧-١٧٨) + (١٧٨-١٧٩) + (١٧٩-١٨٠) + (١٨٠-١٨١) + (١٨١-١٨٢) + (١٨٢-١٨٣) + (١٨٣-١٨٤) + (١٨٤-١٨٥) + (١٨٥-١٨٦) + (١٨٦-١٨٧) + (١٨٧-١٨٨) + (١٨٨-١٨٩) + (١٨٩-١٩٠) + (١٩٠-١٩١) + (١٩١-١٩٢) + (١٩٢-١٩٣) + (١٩٣-١٩٤) + (١٩٤-١٩٥) + (١٩٥-١٩٦) + (١٩٦-١٩٧) + (١٩٧-١٩٨) + (١٩٨-١٩٩) + (١٩٩-٢٠٠) + (٢٠٠-٢٠١) + (٢٠١-٢٠٢) + (٢٠٢-٢٠٣) + (٢٠٣-٢٠٤) + (٢٠٤-٢٠٥) + (٢٠٥-٢٠٦) + (٢٠٦-٢٠٧) + (٢٠٧-٢٠٨) + (٢٠٨-٢٠٩) + (٢٠٩-٢١٠) + (٢١٠-٢١١) + (٢١١-٢١٢) + (٢١٢-٢١٣) + (٢١٣-٢١٤) + (٢١٤-٢١٥) + (٢١٥-٢١٦) + (٢١٦-٢١٧) + (٢١٧-٢١٨) + (٢١٨-٢١٩) + (٢١٩-٢٢٠) + (٢٢٠-٢٢١) + (٢٢١-٢٢٢) + (٢٢٢-٢٢٣) + (٢٢٣-٢٢٤) + (٢٢٤-٢٢٥) + (٢٢٥-٢٢٦) + (٢٢٦-٢٢٧) + (٢٢٧-٢٢٨) + (٢٢٨-٢٢٩) + (٢٢٩-٢٣٠) + (٢٣٠-٢٣١) + (٢٣١-٢٣٢) + (٢٣٢-٢٣٣) + (٢٣٣-٢٣٤) + (٢٣٤-٢٣٥) + (٢٣٥-٢٣٦) + (٢٣٦-٢٣٧) + (٢٣٧-٢٣٨) + (٢٣٨-٢٣٩) + (٢٣٩-٢٤٠) + (٢٤٠-٢٤١) + (٢٤١-٢٤٢) + (٢٤٢-٢٤٣) + (٢٤٣-٢٤٤) + (٢٤٤-٢٤٥) + (٢٤٥-٢٤٦) + (٢٤٦-٢٤٧) + (٢٤٧-٢٤٨) + (٢٤٨-٢٤٩) + (٢٤٩-٢٥٠) + (٢٥٠-٢٥١) + (٢٥١-٢٥٢) + (٢٥٢-٢٥٣) + (٢٥٣-٢٥٤) + (٢٥٤-٢٥٥) + (٢٥٥-٢٥٦) + (٢٥٦-٢٥٧) + (٢٥٧-٢٥٨) + (٢٥٨-٢٥٩) + (٢٥٩-٢٦٠) + (٢٦٠-٢٦١) + (٢٦١-٢٦٢) + (٢٦٢-٢٦٣) + (٢٦٣-٢٦٤) + (٢٦٤-٢٦٥) + (٢٦٥-٢٦٦) + (٢٦٦-٢٦٧) + (٢٦٧-٢٦٨) + (٢٦٨-٢٦٩) + (٢٦٩-٢٧٠) + (٢٧٠-٢٧١) + (٢٧١-٢٧٢) + (٢٧٢-٢٧٣) + (٢٧٣-٢٧٤) + (٢٧٤-٢٧٥) + (٢٧٥-٢٧٦) + (٢٧٦-٢٧٧) + (٢٧٧-٢٧٨) + (٢٧٨-٢٧٩) + (٢٧٩-٢٨٠) + (٢٨٠-٢٨١) + (٢٨١-٢٨٢) + (٢٨٢-٢٨٣) + (٢٨٣-٢٨٤) + (٢٨٤-٢٨٥) + (٢٨٥-٢٨٦) + (٢٨٦-٢٨٧) + (٢٨٧-٢٨٨) + (٢٨٨





(٤٤٩)

ة فان اخذ  $s$  في الزيادة بالابتداء من الصفر فان مقدار الكمية  
 المحدود لا يزال آخذاً في الزيادة ولا تتغير علامته الاسمة  
 ة كما تقدم (في ٣٣٣) وجنيد يرى أن المقدار المذكور  
 ب النسبة الى  $s = ٤$  وحيث يرى أن الكمية ذات الحدين  
 $\frac{١}{٤}$  موجبة ايضاً بالنسبة الى  $s = ٤$  فيكون العدد  
 اية كبرى للجذور الموجبة

تعل  $s = ٣$  في الكمية الكيرة الحدود  $s^٣ + s^٢ - ٦٠s - ٤٨$   
 من ذلك ناتج سالب وبتأعلى ذلك تكون هذه الكمية الكيرة  
 د سالبة ايضاً بالنسبة الى كل مقدار يفرض للتغير  $s$  بشرط  
 ن هذا المقدار أصغر من  $٣$  وحيث أن  $s = \frac{١}{٤}$  سالب  
 النسبة الى  $s = ٣$  والى كل مقدار يفرض لهذا المتغير  
 ان يكون أصغر من  $٣$  فيكون العدد  $٣$  نهاية صفري للجذور  
 ة للمعادلة

بنت ايضاً المعادلة

$s^٣ - ٦٠s - ٤٨ = ٠$  اي  $s^٣ - ٦٠s - ٤٨ = ٠$   
 ل النهاية الصغرى للجذور الموجبة لهذه المعادلة توضع

(٤٨)

(س -  $\frac{٥}{٤}$ ) +  $\frac{٥}{٩}$  موجبة بالنسبة لآثار المقادير الحقيقية المفروضة  
 للتغير س فيكون العدد ٤ نهاية كبرى للجذور الموجبة وتكون  
 هذه النهاية بمقتضى القاعدة المتقدمة (في س ٤٨) بيينة بالعدد ١٠١  
 ولنغرض أيضاً المعادلة

$$٤س - ٧س + ٣س + ٤س - ٣س - ٦٠س - ٤٨ = ٠$$

التي يمكن وضعها بالصورة

$$٤س (س - \frac{٧}{٤}) + ٣س + ٤س - ٣س - ٦٠س - ٤٨ = ٠$$

فيأخذ أن القيمة ذات الحدين  $س - \frac{٧}{٤}$  تكون موجبة بالنسبة  
 لكل مقدار يفرض للتغير س بشرط أن يكون هذا المقدار أكبر من  $\frac{٧}{٤}$   
 وبشاهد أيضاً بمقتضى القاعدة المتقدمة في (س ٤٨) أن القيمة الكبيرة  
 الحدود  $٣س + ٤س - ٣س - ٦٠س - ٤٨$  تكون موجبة بالنسبة إلى  
 $٣س + ١ = ٦٠$  وإلى كل مقدار أكبر من هذا المقدار وحيث أن  
 $٦٠ + ١$  محصورين ٤ ٥ فيكون العدد ٥ هو النهاية  
 الكبرى للجذور الموجبة للمعادلة

ويمكن في هذا المثال تحصيل نهاية أصغر من النهاية ٥ لأنه لما كان  
 لا يوجد في القيمة الكبيرة الحدود  $٣س + ٤س - ٣س - ٦٠س - ٤٨$  الاغلاية  
 واحدة

## في ترتيب الأعداد

بما أن الأعداد في كل مقام من مقامات العدد لا تتكرر  
فإن كل مقام من مقامات العدد لا يتكرر

و يمكن أن يكون تكرار الأعداد في مقامات العدد

بما أن يمكن أن تكون الأعداد في المنطقة أعداداً صحيحة أو كسوراً

بالنسبة إلى الجذور الصحيحة فنقترح أن نزيد الأعداد في المقامات

التي هي الرابعة

$$ج + ح + د + هـ + س + ش + ع + ف =$$

فإذا جعل ح كتابة عن جذر صحيح لهذه المعادلة فإنه يحدث

$$ج + ح + د + هـ + س + ش + ع + ف =$$

ومن هنا يؤخذ

$$\frac{ف}{ج} = - - ج - ح - د - هـ - س - ش - ع$$

وحيث أن الطرف الأول من هذه المساواة عدد صحيح فينزم أن ج

يقسم ف قيمة بلا باق

ويجعل  $\frac{ف}{ج} = - - ج - ح - د - هـ - س - ش - ع$  ينتج من المساواة السابقة

$$\frac{ف}{ج} = - - ج - ح - د - هـ - س - ش - ع$$

بالصورة

$$٠ = ٦٠ + ٥٠ - ٨ - ٤ - ٣ + ١٠ - ٥ - ٣ - ٤ + ٧ + ٨ = ٠$$

ومن المحقق بمقتضى البراهين المقدمة (في بند ٥٥ و ٥٦) انه اذا كانت القيمة الكثيرة الحدود المرتبة بحسب الدرجات المتعدية للحر  $٨$  مركبة من حد واحد أو من عدة حدود موجبة متبوعة بحدود كلها سالبة فانها ان كانت موجبة بالنسبة لأي مقدار رقمي يفرض للتغير  $٨$  كانت موجبة كذلك بالنسبة لأي مقدار رقمي اصغر منه

وحيث أن الميتين الكبيرتين الحدود  $٦٠ + ٥٠ - ٨ - ٤ - ٣ + ١٠ - ٥ - ٣ - ٤$  فيكون العدد  $٤$  نهاية صغرى للجذور الموجبة للمعادلة

فاذا وضعت للمعادلة بالمثابة

$$٨ (٣ + ٣ - ٤ - ٥) + ١٠ (٤ - ٥ - ٣ - ٨) + ٥٠ + ٦٠ = ٠$$

شوهد أن العدد  $٤$  نهاية كبرى للجذور الموجبة وبناءً على ذلك لا يكون للمعادلة جذر موجب وحيث أنه يوجد بها أربع متغيرات فيكون لها بالاقول أربعة جذور تخيلية

ش كان خارج قسمة المجموع على  $د$  عددًا صحيحًا أو هلم جرا  
 وبالحيلة اذا توالتى العمل الى أن تحصل خارج القسمة الذى مرتبته  $(١-٢)$   
 (فى معادلة درجتها  $٢$ ) واضيف الى هذا الخارج مكرراً الحد المحنوس  
 على  $٢١$  وقسم المجموع على  $د$  نحصل من ذلك خارج قسمة يكون  
 ما ويا المكرر الحد الأول مأخوذاً بعلامة مخالفة لعلامة  
 فان كانت المعادلة غير تامة أُجريت عليها عملية المعادلة التامة  
 وذلك بأن يجعل الصفر مكرراً لكل من قوى المتغير من الأقاصى  
 من هذه المعادلة

سند ولتحصيل الجذور الصحيحة لمعادلة بواسطة الشرط المذكور  
 ٢٦٤  
 تجرى عملية الحساب كما فى المثال —

$$\text{ش} + \text{ه} + \text{ش} + \text{ش} - \text{ش} - ١٦ \text{ش} - ٢٠ \text{ش} - ١٦ = ٠$$

المبين فى هذا الجدول

وجيئذ يعلم من هنا أن  $\frac{ق}{ح}$  يقسم أيضًا  $\frac{ع}{ح}$  + ف قسمة بلا باق  
واذا جعل  $\frac{ق}{ح} = \frac{ع}{ح}$  = حدث

$$\frac{ق}{ح} + \frac{ق}{ح} = \frac{ع}{ح} - \frac{ع}{ح} - \frac{ع}{ح}$$

ومن هنا يؤخذ أن  $\frac{ق}{ح}$  يقسم أيضًا  $\frac{هـ}{ح}$  + قسمة بلا باق فاذا  
جعل  $\frac{ق}{ح} = \frac{هـ}{ح}$  = حدث

$$\frac{ق}{ح} + \frac{ق}{ح} = \frac{هـ}{ح} - \frac{هـ}{ح}$$

فاذا تخفوهذا الشرط الأخير كان  $\frac{ق}{ح}$  هو جذر المعادلة  
المفروضة اذ بمقتضى هذا الشرط تكون  $\frac{ق}{ح} + \frac{ق}{ح} = \frac{هـ}{ح}$  =

$$\text{وجيئذ تكون الكمية } \frac{ق}{ح} + \frac{ق}{ح}$$

للقسمة دومة هي الناتج المتحصل من وضع  $\frac{ق}{ح}$  بدل  $\frac{ق}{ح}$   
في الطرف الأول من المعادلة بعد قسمتها على  $\frac{ق}{ح}$  وعلى ذلك  
يلزم لكن تكون كمية صحيحة كالكمية  $\frac{ق}{ح}$  جذر المعادلة

أولاً ان هذه الكمية تكون قاسمة للمحد الأخير

وثانياً انه اذا اضيف الخارج قسمة المحد الأخير على  $\frac{ق}{ح}$  مكرر

المحد المخوى على  $\frac{ق}{ح}$  كان خارج قسمة المجموع على  $\frac{ق}{ح}$  عددًا صحيحًا  
وثالثاً انه اذا اضيف الى هذا الخارج الأخير مكرر المحد المخوى على

الذي هو - ٤٠

وتحصل عدد والصف الرابع بواسطة قيمة كل حد من الصف  
السابق عليه على حد الصف الأول المتقدم اذا كانت القيمة  
صحيحة بلا باق

وتتكون باقى الصفوف بهذه المثابة

وجيئة تكون الجذور الصحيحة هي + ، - ، - ، -

فاذا قم الطرف الأول من المعادلة على حاصل ضرب المضارب

س - ٤ و س + ٤ و س + ٤ و س + ٤ تحصل خارج القيمة س + س + ١

وجيئة يحدث الجذران الآخران من حل المعادلة س + س + ١ =

ويجذف عادة من الجدول السابق القاسمان + ١ و - ١ لانه

يسهل استخراج الجذران من المعادلة مباشرة ويمكن ايضا في مبداء

الأمريتين نهايتي الجذور بحيث لا تجرب القواسم المحصورة

بين هاتين النهايتين ويؤخذ من المثال السابق ان نهاية الجذور

الموجبة المحصورة بواسطة القاعدة المتقدمة (في ص ٤٣٥) هي

١ + ٣ و هي عدد اقل من ٤ فاذا وضع في المعادلة - س

بدل س شوهد أن - ٤ هو نهاية الجذور السالبة وجيئة

$$\begin{aligned}
 & 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 153 \\
 & 153 + 144 + 135 + 126 + 117 + 108 + 99 + 90 + 81 + 72 + 63 + 54 + 45 + 36 + 27 + 18 + 9 = 1728 \\
 & 1728 + 1664 + 1600 + 1536 + 1472 + 1408 + 1344 + 1280 + 1216 + 1152 + 1088 + 1024 + 960 + 896 + 832 + 768 + 704 + 640 + 576 + 512 + 448 + 384 + 320 + 256 + 192 + 128 + 64 = 65536 \\
 & 65536 + 63488 + 61440 + 59392 + 57344 + 55296 + 53248 + 51200 + 49152 + 47104 + 45056 + 43008 + 40960 + 38912 + 36864 + 34816 + 32768 + 30720 + 28672 + 26624 + 24576 + 22528 + 20480 + 18432 + 16384 + 14336 + 12288 + 10240 + 8192 + 6144 + 4096 + 2048 + 1024 = 268435456 \\
 & 268435456 + 262144000 + 255850000 + 249556000 + 243262000 + 236968000 + 230674000 + 224380000 + 218086000 + 211792000 + 205498000 + 199204000 + 192910000 + 186616000 + 180322000 + 174028000 + 167734000 + 161440000 + 155146000 + 148852000 + 142558000 + 136264000 + 129970000 + 123676000 + 117382000 + 111088000 + 104794000 + 98500000 + 92206000 + 85912000 + 79618000 + 73324000 + 67030000 + 60736000 + 54442000 + 48148000 + 41854000 + 35560000 + 29266000 + 22972000 + 16678000 + 10384000 + 4090000 = 1073741824000
 \end{aligned}$$

اعني انه يلزم أن نكتب في صف واحد سائر قواسم الحد الأخير  
 إما بعلامة + أو بعلامة - ونضع مرتبة بحسب قيمتها  
 ثم نكتب تحتها في صف آخر خواص القسمات المتحصلة من شمة للحد  
 الأخير - ١٦ على كل فوهة هذه القواسم  
 ويكون الصف الثالث بهذه المثابة وهي أن يضاف لكل من  
 الخواص الموجودة في الصف السابق عليه مكرر الحد المحوّن من  
 الذي



٦- س + ٣ وحيث ان خارج س لا ونكرر الحد الأول من المعادلة  
بأخوذ ابعادة مخالفة و... فيكون - ٣ هو أحد الجذور  
المنطلوبة

وحيث كان خارج قسمة س - ٥ + ١٠٥ على س - ٣ هو  
س + ٦ - ٣٥ يتحصل الجذران الآخران بواسطة حل  
معادلة س + ٦ - ٣٥ = ٠ وهذان الجذران غير منطقيين  
بند وحيث انه يمكن ان جذور المعادلة المفروضة تكون متساوية  
عند قسمتها على حاصل ضرب المضارب المطابقة للجذور الصحيحة  
مختصة يلزم ان يتجوز العلية على المعادلة الناتجة منها كما اجرت  
ليها بشرط ان لا تستعمل غير الجذور والمختصة ثم يتوالى العمل  
هذه السابعة ان تحصل معادلة لا تكون شتمة على واحد من  
جذور صحيحة نتيجة للمعادلة المفروضة وجنيد تعلم الجذور  
مكررة ودرجته تكرار كل واحد منها

بند اذا فرض ان تكرارهم ... يكون جذور المعادلة

س + س + س + ... + س + س = ٠  
وكانت لمكررات س س س ... اعدادا صحيحة فالوضع لهذه

(٤٤٦)

لا تجرب غير الأعداد  $+ ٤, + ١, - ١, - ٤$   
 سند فاذا فرضت ايضاً المعادلة

$$٤ - ٣ - ٥ + ١٠ = ٠$$

فلا يكون العدان  $+ ١, - ١$  جذورين لها وتكون النهايات

$$١٠٥ + ٥٣ - ٥ - (١ + \frac{١٠٥}{٤})$$
 وتكون قواسم العدد ١٠٥

المحصورة بين هاتين النهايتين هي ٣, ٥, ٣, ٥, ٧

وهذه القواسم تسلمن أجزاء العليات الآتية وهي

$$٧ +, ٥ -, ٣ -, ٣ +, ٥ +$$

$$١٥ -, ٤ +, ٣٥ -, ٣٥ +, ٤ -, ١٥ -$$

$$٦٨ -, ٧٤ -, ٨٨ -, ١٨ -, ٣٤ -$$

$$٦ -$$

$$٤ -$$

فيما هـ بعد تحصيل الصف الثالث انه لا يراد من توالى هذه

العمليات التجريبية الاتحصيل القاسم  $+ ٣$  وينبغي أن يضاف

الى خارج القسمة  $- ٢$  مكرر الحد المحتوى على المتغير  $٣$  وحيث

هذا الحد ناقص فيكون مكرره ماوياً للصفر وجنيد يلزم ان يقسم

(٤٣٩)

قوله التي مكررها الأول هو الواحد ومكررات حدودها الآخر  
اعداد صحيحة

ينبغي وحيث أن الكسر  $\frac{h}{r}$  من جذور المعادلة فيكون الطرف الأول  
قابلاً للقسمة على  $r - h$  ويكون الخاج (كافي ينبغي) هو

$$\begin{array}{c|c|c} h^{1-2} + \frac{h^{1-2}}{r} & h^{2-2} + \frac{h^{2-2}}{r} & h^{3-2} + \frac{h^{3-2}}{r} \\ h + & h + & h + \\ \hline \frac{h^{1-2}}{r} + \frac{h^{2-2}}{r^2} + \dots & \frac{h^{2-2}}{r} + \frac{h^{3-2}}{r^2} + \dots & \frac{h^{3-2}}{r} + \frac{h^{4-2}}{r^2} + \dots \end{array}$$

فإذا رمزنا إلى هذا الخاج بالرمز  $h$  وإلى الطرف الأول من المعادلة  
الرمز  $r$  فإنه يحدث

$$r = (r - h) \left( \frac{h}{r} \right) \text{ أو } r = (r - h) \left( \frac{h}{r} \right)$$

،  $r$  هي كمية كثيرة الحدود تامة فإذا كان  $\frac{h}{r}$  محتوياً على مقامات  
يقتضي بسبب أن هذه المقامات أولية مع  $r - h$  لا يمكن أن  
يكون حاصل الضرب  $(r - h) \left( \frac{h}{r} \right)$  كمية كثيرة الحدود تامة  
كافي ينبغي) فإذا يلزم أن يكون الكسر  $\frac{h}{r}$  كمية كثيرة الحدود  
تامة وإذا تكون  $h$  كمية كثيرة الحدود تامة أيضاً

المعادلة  $\frac{1}{x}$  بدل من تحصل

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^n} + \dots$$

وبضرب هذه المعادلة الكبيرة الحدود في  $x$  يحدث

$$= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^{n-1}} + \dots$$

ومن هذه المتساوية يؤخذ أن خارج قسمة  $\frac{1}{x}$  على  $1$  و

$\frac{1}{x}$  على  $\frac{1}{x}$  يكونان عددان صحيحين وحيث أن العددين

$n$  و  $1$  أوليان معاً فيكون العدد  $1$  قاسماً للمكرر  $\frac{1}{x}$  والعدد

$\frac{1}{x}$  قاسماً للمكرر  $\frac{1}{x}$

وهذه النظرية تستنبط منها أن الجذور والمنطقة تقير كلها أعداداً

صحيحة إذا ضربت جميع الجذور في العدد  $\frac{1}{x}$  الذي هو مكرر الحد

الأول إذ بهذه المثابة يؤول البحث عن الجذور والكسرية إلى

البحث عن الجذور والصحيحة لكنه يمكن أيضاً تحصيل الجذور والكسرية

بواسطة إجراء العملية على المعادلة مباشرة

ويؤخذ أيضاً من هذه النظرية أنه إذا كان مكرر الحد الأول هو

الواحد فلا تكون الجذور والمنطقة إلا أعداداً صحيحة ويأخذ

أيضاً أنه إذا ضربت جميع الجذور في  $\frac{1}{x}$  حدثت من ذلك المعادلة

المعكوسة

(٤٤١)

جـ من جذور المعادلة كان الناتج الحادث من وضع  $+ ١$  بدل  $س$   
 في القيمة  $س$  قابلاً للقسمة على  $س - ١$  والناتج الحادث من وضع  
 $١ - بدل س$  في القيمة المذكورة قابلاً للقسمة على  $س + ١$  ثم  
 يبحث بين الكور المتكونة بالثابتة المقدمة عن الكور المحققة  
 للشرطين المذكورين ويقطع النظر عما عداها

ولتعيين الجذور الصحيحة يلزم ان يفرض ان  $س = ١$  وحينئذ اذا  
 كان  $س$  واحداً من هذه الجذور كان  $س - ١$  قاسماً للناتج الحادث  
 من وضع  $+ ١$  بدل  $س$  و  $س + ١$  قاسماً للناتج الحادث من وضع  
 $١ - بدل س$

ولنمثل لذلك بالمعادلتين

$$٦س - ١٩س + ١٣س + ٤٠س + ٨س - ١٦ = ٠$$

$$١٥س + ١٦س - ٤٦س - ٥س + ٦ = ٠$$

فاما المعادلة الاولى فيكون  $س$  واحداً من جذورها الحقيقية مكرراً  
 مرتين ويكون جذورها الآخرون  $\frac{١}{٣} - س$  و  $\frac{١}{٧} - س$  وأما باقي الجذور  
 تكون تخيلية واما المعادلة الثانية فيكون جذورها الحقيقية  
 $\frac{١}{٥} - س$  ويكون جذورها الآخرون غير منطقيين

ينبغي فاذا فرض الآن انه قد تكونت سائر الكور الموجبة والسالبة  
التي تكون بسوطها قواسم الحد الأخير ومقاماتها قواسم مكرر الحد  
الأول وكان  $\frac{1}{2}$  واحدا من هذه الكور فلكي يعلم هل هذا الكور من  
جذور المعادلة  $x^3 = 0$  ام لا يضرب العدد  $\frac{1}{2}$  الذي هو  
مكرر الحد الأول في  $\frac{1}{2}$  ثم يضاف الى حاصل الضرب العدد  
 $\frac{1}{2}$  الذي هو مكرر الحد  $x^2$  ويضرب المجموع في  $\frac{1}{2}$  ويضاف  
الى الحاصل العدد  $\frac{1}{2}$  الذي هو مكرر الحد  $x$  وهلم جرا  
وجنبه يلزم ان تكون جميع النواتج المتحصلة اعدادا صحيحة ويكون  
النتائج الأخيرة مساويا للصفر

فاذا تحصل جذر كالمجذر  $\frac{1}{2}$  علم مباشرة خارج قمة الطرف  
الأول من المعادلة على  $x - \frac{1}{2}$  وبقمة هذا الخارج على  $x$   
يتحصل خارج قمة الكمية الكثرة الحدود  $x^3$  على  $x - \frac{1}{2}$   
وبجعل هذا الخارج الأخير مساويا للصفر تتصل بمادلة دون  
المعادلة المفروضة في الدرجة منها يتحصل المجذر الآخر

ينبغي وحيث أن خارج قمة  $x^3$  على  $x - \frac{1}{2}$  كمية كثيرة الحدود  
تامة فينتج من ذلك بفرض  $x = 1$  انه اذا كانت

(42)

و بوضع سے پہلے سے بدل سے بمقتضیٰ

ی (س + ص) = (س + ی - ح) (ص + س - ی) (ص + س - ح) ...

(ص + ح - ك)

وعملي اعتبار الحرف الثاني من هذه المتأوية كحاصل ضرب مركب  
من مضارب كميات ذات حدين عددها م وحدتها الاول ص  
وحدها الثانية س - ح ح س - و ح ح و بناً على ذلك  
يكون مكرراً ولقوة التقدير ص في هذا الحاصل ماوياً بالمجموع  
حاصل ضرب الكميات س - ح ح س - و ح ح بحيث يكون  
عدد مضارب كل حاصل ماوياً م - ١ وجنيد يكتفي لتكوين  
هذه الحاصل أن تقسم بالتوالي الدلالة و (س) على كل من المضارب

۱۔ فیصد

$$\frac{x}{n} + \frac{x}{n-1} + \dots + \frac{x}{2} + x = x \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right)$$

فاذا فرضي الآن أن

$$s(s) = (s-h)^2(s-y)^2(s-g)^2$$

فانه يلزم في مجموع خوارج قسمة الدلالة (س) على كل من مضاربيها ان خارج قسمة (س) على س - ه يتكرر مراراً

في طريقة الجذور المتساوية

٤٧١ سند حيث أن الطرف التي يلزم استعمالها في تقدير الجذور غير المنطقة  
تقتضي كاسياً أي أنه لا يكون للعادلة جذور متساوية فن الضرور  
اختيار الحالة التي يتحقق هذا الشرط واليكيفية التي يمكن بها تحويل  
المعادلة المفروضة الى معادلات أخرى لا يدخل كل جذر في الواحدة  
منها الامرة واحدة عند عدم تحقق هذا الشرط

٤٧٢ سند مثلاً اذا فرضت المعادلة

$$x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 = 0$$

ورمز للاختصار بالرمز  $x$  الى الطرف الاول من هذه المعادلة  
وبالرمز  $x'$  الى المشتقةا وهي

$$4x^3 - 12x^2 + 4x - 1$$

فكون المشتقة  $x'$  مكرراً الأول قوة للتغير ص في الناتج  
المحصل من وضع  $x + ص$  بدل  $x$  في البكبة الكبيرة الحدود  
 $x$  و  $x'$  لانه اذا رمز الجذور المعادلة بالرموز  $h, b, c, d$   
 $h, b, c, d$  فجدد

$$h = (b-c)(c-d)(d-h) \dots (h-k)$$



[illegible]

فإذا كان هذا هو المقصود من الاستدلال فليس هو المقصود من الاستدلال  
بل المقصود من الاستدلال هو الاستدلال على أن الاستدلال على أن الاستدلال  
لحدود (أو) ومشتق (أو) من هذا الاستدلال على أن الاستدلال  
عددا كانت جذور المعادلة غير متساوية وإن كان محققا على التقدير  
سواء بدرجة أولى فإنه يكون دائما على وجود جذرين متساويين  
من جذور المعادلة وتكون باقي جذورها غير متساوية وإن كانت

(٤٤٤)

عددها م وخارج قسمة د (س) على س - د بتكرر مراراً عدداً  
ع وخارج قسمة د (س) على س - ه بتكرر مراراً عدداً ك ون ح  
وجنيد يتحصل

$$\begin{aligned} & \text{د (س)} = \text{ح (س)} - \text{ج (س)} - \text{د (س)} - \text{ه (س)} + \text{ن ح} \\ & + \text{ع (س)} - \text{ح (س)} - \text{د (س)} - \text{ه (س)} + \text{ك} + \text{ن ح} \\ & + \text{ك (س)} - \text{ح (س)} - \text{د (س)} - \text{ه (س)} + \text{ك} + \text{ن ح} \end{aligned}$$

وبالمقارنة بين مقدارى كل من د (س) و د (س) يعلم ان كل واحدة  
منها بين الجكبين تقبل القسمة على حاصل الضرب

$$\text{(س - ح)} \text{ (س - د)} \text{ (س - ه)} \text{ (س - ك)} \text{ (س - ن)} \text{ (س - ح)}$$

وزيادة على ذلك برى ان هذا الحاصل هو القاسم المشترك الأعظم  
بين الجكبين الكبر في الحدود د (س) و د (س) لانه ان لم يكن  
كذلك لزم ان يكون أحد مضارب د (س) قاسماً ايضاً لخارج  
قسمة د (س) على الحاصل المذكور وحيث أن هذا الخارج هو  
ح (س) - د (س) - ع (س) - ح (س) - د (س) - ه (س) + ن ح + ك  
ن ح

وان كل واحد من المضارب س - ح و س - د و ن ح يقسم جميع

بسم الله الرحمن الرحيم  
الحمد لله الذي جعل في خلقه  
مناجاة لكل شيء

والصلاة والسلام على  
سيدنا محمد وآله الطيبين الطاهرين  
الطاهرة الطاهرة

والله اعلم  
بما في صدورهم  
والله اعلم  
بما في صدورهم

فأما أنت أيها الملك  
الذي لا يدرى  
بما في صدورهم  
والله اعلم

بما في صدورهم  
والله اعلم  
بما في صدورهم  
والله اعلم

بما في صدورهم  
والله اعلم  
بما في صدورهم  
والله اعلم

(٦٤٦)

القاسم المشترك الأعظم المذكور بد درجة ثانية فإذا لم يتجزأ أحد  
 للمصغر فيحصل من ذلك معادلة يمكن أن يكون جها زاهيا غير متساويين  
 أو متساويين فإن كانا غير متساويين دخل كل واحد منهما في المعادلة  
 د (س) = . مرتين وإن كانا متساويين كان للمعادلة ثلاثة جذور

متساوية كل واحد منها مساوٍ للقدر المتحصل للتغير س

٧٤ سند ولنوضح الطريقة التي يلزم سلوكها في العمل عند ما يكون  
 القاسم المشترك الأعظم بين د (س) و (س) كمية كثيرة الحدود  
 درجتها أعلى من الدرجة الثانية فنقول —

إذا جعل س رمزًا لحاصل ضرب المضاريب اليسيرة في الحلقة  
 في الكمية الكبيرة الحدود د (س) و س رمزًا لحاصل ضرب  
 القوى الأولى للمضاريب المتساوية مثنى و س رمزًا لحاصل  
 ضرب القوى الأولى للمضاريب المتساوية ثلاث و س رمزًا  
 لحاصل ضرب القوى الأولى للمضاريب المتساوية رباع و س  
 أنه لا يوجد مضاريب من الداخلة في المعادلة تزيد في الدرجة  
 عن ذلك فيجعد —

د (س) = س س س س

فاذا جعل





*[Handwritten notes and scribbles]*

*[Handwritten musical notation on five staves]*

بتعريف الخواص في هذا الموضع  
 في الموضعين المذكورين الحدود في  
 في الموضعين المذكورين الحدود في  
 في الموضعين المذكورين الحدود في

بند اذا كانت قسمة الطرف الأول من المعادلة المفروضة











٤٧٩ متى علم جذر كالجذر  $\sqrt{h}$  لمعادلة أمكن تعيين درجة تكرار  
 هذا الجذر بواسطة وضعه في المشتقات المتوالية للطرف الأول  
 من هذه المعادلة لانه يؤخذ من النظرية المتقدمة (في بند)  
 انه اذا كان الطرف الأول من المعادلة قابلاً للقسم على  
 (س-ح)<sup>١</sup> كانت مشتقة الأولى قابلة للقسم على (س-ح)<sup>٢</sup>  
 ومشتقة الثانية قابلة للقسم على (س-ح)<sup>٣</sup> وهلم جرا  
 ومشتقة ذات المرتبة م-١ قابلة للقسم على س-ح ومشتقة  
 التالية لها غير محتوية على المضروب س-ح وجنذاً فالجذر  
 $\sqrt{h}$  يجعل المشتقات المتوالية الى المشتقة م-١ للطرف الأول  
 من المعادلة مساوية للصفر بشرط ان لا تتوول المشتقة التالية  
 لهذه الاخيرة الى الصفر

بند ويمكن التوصل الى نظرية كالمقدمة (في بند) بواسطة  
 طريقة مغايرة للطريقة التي سلكناها وهذه الطريقة هي  
 التي تعين بها الدالات المشتقة بكيفية بسيطة  
 لانه اذا جعل  $\sqrt{h}$  رمزاً واحداً من جذور المعادلة (س) =  
 وتكونت من ذلك معادلة أخرى جذورها لا تنقص عن جذور  
 المعادلة المفروضة الا بالجذر  $\sqrt{h}$  كانت لهذه المعادلة

في استخراج جذور

منها في استخراج جذور هذه الجذور وحالاتها من بابها  
 في استخراج الجذور التي تتعلق بنوعين نهايتين لكل جذر أحدهما  
 المستخرج من منه والآخرى أكثر من منه وبها تاسف  
 في استخراج الجذور من بعض ما على وجه بحيث لا ينفك عن بينهما  
 غير جذر واحد وهذا هو المعروف بحصر الجذور والحدثة  
 الثانية في التي تتعلق بالبحث عن مقدار كل جذر مع  
 درجة التقريب المطلوبة

وقد سبق البرهان على أنه  
 الأول من معادلة بدل التغير في  
 في الصلابة كان للعلماء بالاعتماد على  
 هاتين الجذبتين وهذه نظرية معروفة في استخراج  
 كيفية استخراج الجذور

نظرتي

إذا وضعنا بالتوالي في الطرف الأول من معادلة بدل المتغير  
 كيتين بينهما جذر حقيقي أو عدد فردي من الجذور وتحصل من ذلك

عنده المعادلة أن  $S = H$  وإذا كان  $H$  كتابة عن جذر معادلة  
وانعدمت في فوض  $S = H$  مشتقات الطرف الأول  
إلى المشتقة التي مرتبتها  $H-1$  بدون أن تنعدم  
المشتقة التي مرتبتها  $H$  دخل الجذور في المعادلة مراراً  
عندها  $H$  لأنه يكون للمعادلة التي جذورها لا تنقص عن جذور  
المعادلة المفروضة إلا بالجذر  $H$  جذور عددها  $H$  وكل واحد  
منها إما للصفر ومن هنا تؤخذ مباشرة النظرية المتقدمة  
(في ص ٤٧) لأنه إذا كانت المشتقات الأولى للدلالة  $H(S)$   
التي عددها  $H-1$  تؤول إلى الصفر عند جعل  $S = H$  وكانت  
الأخرى غير معدومة كان للمعادلة  $H(S) = 0$  جذور  
عددها  $H-1$  وكل واحد منها إما للجذر  $H$  وبناً على ذلك  
تكون المشتقة  $H(S)$  قابلة للقسم على  $H(S) = 0$  وهذه  
الحجة الكثيرة الحدود لا تقبل القسمة على قوة أعلى من القوة  
 $H(S) = 0$  لأنه يلزم لكي تكون المشتقة  $H(S)$  قابلة للقسم  
على  $H(S) = 0$  أن المشتقة النونية للدلالة  $H(S)$  تنعدم  
عند جعل  $S = H$



الناجيات متخالفان في العلامة فاذا كان لا يوجد بين هاتين الكيتين  
 جذر حقيقي أو كان يوجد بينهما عدد زوجي من الجذور فان الناجيتين  
 المذكورين يكونان متحدين في العلامة

ولكن المعادلة المفروضة هي  $x^2 = 0$  . ويجعل  $L = 0$  في  
 رمزين الكيتين حقيقتين ويفرض أن  $L > 0$  . فان كان لا يوجد  
 للمعادلة جذر يكون محصورا بين الكيتين  $L = 0$  في المذكورين  
 كان الناجيان المتحصلا من وضع هاتين الكيتين بالتوالي بدلا  
 من متحدين في العلامة لانها لو تخالفا في العلامة لوجد  
 بين  $L = 0$  في جذرو هذا مخالف لما فرض (٣٣)

ولنتخذ الآن الحالة التي يوجد فيها بين  $L = 0$  في جذور ونفرض  
 ان هذه الجذور مميّنة بالرموز  $0, 1, 2, 3, \dots, n-1$  فتكون  
 الكية الكثيرة الحدود قابلة للقسم على حاصل ضرب المضارب  
 $x - 0, x - 1, x - 2, \dots, x - (n-1)$  . وجنبا اذا رمز الى الخارج  
 بالرمز  $x$  في (٣٣) تحصل

$x^n = (x-0)(x-1)(x-2)\dots(x-(n-1)) \times f(x)$   
 فاذا فرض بالتوالي في طرفي هذه المساوية أن  $x = 0, 1, 2, \dots, n-1$  في







من مذهب الاستبدال <sup>(١٠٠)</sup> في الزيادة في الزيادة  
 وإذا اربح حصرا لجذور السالبة وقوتها هافانه بالزيادة في  
 بدل المقترن لاعداد المعصومة من السالبة في السالبة في السالبة  
 الموجبة ان عدد تغيرات الجذور كانت زوجية في السالبة  
 الحادثة من الاستبدال في السالبة في السالبة في السالبة  
 مثلاً ان افترضنا  $x^2 + 10x + 16 = 0$

يقال ان هذه المعادلة لها جذور سالبة  
 لانها لا يوجد بها اعداد سالبة في الجذور  
 + ١٠ + ١٦ وان الجذور سالبة لانها سالبة  
 كان الناتج - ١٠ وان الجذور سالبة لانها سالبة  
 عليه الاستبدال الثاني في السالبة في السالبة في السالبة  
 للمعادلة جذران موجبان موجبان موجبان موجبان  
 بين ٢، ٤

واذا اربح حصرا لجذور السالبة وحدها فانه يبدأ بوضع  
 - بدل + في المعادلة المقروضة قوول الى

(٤٦٤)

$$\text{ش} - \text{ش} - ١٠ = ١٠ + ١٠ + ١٠ = ٣٠$$

التي تكون نهايات جذورها الموجبة والسالبة هي ٣ - ٢  
 بمنتهى الطريقة المقدمة (في بيدي) فاذا صنعت على التوالف  
 بدل المتغير فالسرف الاول من المعادلة جميع الاعداد الصحيحة  
 اسمر رابين - ٣ + ٢ = شوهذ أن علامات النواتج لا تختلف  
 من الملاحظات المبينة بالجدول الآتي وهو

$$\begin{array}{ccccccc} ٣ - = ٣, & ٢ - = ٢, & ١ - = ١, & ٠ = ٠, & ١ + = ١, & ٢ + = ٢, & ٣ + = ٣ \end{array}$$

$$+ \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$$

ومن هنا يؤخذ أن جميع جذور المعادلة حقيقية وأن اثنين  
 منها موجبان واحد هما محصورين ١, ٢ والاخرين ٣, ٤  
 وأن الاثنين الآخرين سالبان واحد هما محصورين - ١, - ٢  
 والاخرين - ٣, - ٤

فان كانت درجة المعادلة م وعلم أن عدد جذورها الحقيقية  
 لا يزيد عن م - ٢ واجريت عملية حصر الجذور عند  
 ما توضع بدل المتغير الاعداد الصحيحة المحصورة  
 بين النهايتين - حصل للنواتج المعادلة  
 من



١ - ٢ ش + ش - ٨ - ١٠ = ٠

وحيث أن هذه المعادلة تحتوي على ثلاث مغايرات فيكون لها  
ثلاثة جذور موجبة وبمقتضى الطريقة المتقدمة (في ص ١٠٦)  
يشاهد أن العدد ٣ هو النهاية الكبرى لهذه الجذور فإذا أخذت  
بدل المتغير الأعداد ٠، ١، ٢، شوهد أنه يتحصل من هذه  
الأعداد نواتج سالبة وحيث أنه يتحصل من العدد ٣ نواتج موجبة  
فيؤخذ من ذلك أنه يكون للمعادلة ش - ٢ ش - ٨ - ١٠ = ٠  
الأقل جذور سالبة محصورين - ٤، - ٢ أكبر لا يمكن أن يكون  
الجذران الآخران حقيقيين أم تخيليين

نجد إذا علم عدد الجذور الحقيقية فلا يشك في عدد منها  
بأنه الصحيحة وهي أن نضع بدل المتغير أعداداً مقدارها  
منها من بعض بحيث يكون للنواتج الحقة  
غير في المراتب بقدر ما يكون للمعادلة من الجذور  
الحقيقية فإنه لم يكن عدد الجذور الحقيقية حلاً لها فإنه يزعم  
قبيحة نتج من أن بين المقادير المستعينة  
بشأن ليس جديداً من بين كل مقدارين متعولين  
متوالين

تسعة استواهم ركنه بقدره في ان كان عرض بغداد  
مستويا مستويا في خطه في ان كان عرض بغداد  
مستويا مستويا في خطه في ان كان عرض بغداد  
مستويا مستويا في خطه في ان كان عرض بغداد

قوله في ان كان

مستويا مستويا في خطه في ان كان عرض بغداد  
مستويا مستويا في خطه في ان كان عرض بغداد  
مستويا مستويا في خطه في ان كان عرض بغداد  
مستويا مستويا في خطه في ان كان عرض بغداد

قوله في ان كان

مستويا مستويا في خطه في ان كان عرض بغداد  
مستويا مستويا في خطه في ان كان عرض بغداد  
مستويا مستويا في خطه في ان كان عرض بغداد  
مستويا مستويا في خطه في ان كان عرض بغداد

وهي انه لا يوضع بدن المتغير غير الاعداد الصحيحة المتوالية المحصورة  
بين النهايتين

وهذه الطريقة المنسوبة للمهندس وارنغ قد مكنت بمجولة الى ان  
استكشفها المهندس لاجرانج قبل ان يقف على اشغال وارنغ المذكور  
وهي على غاية من الضبط الا انها تجنب في الاعمال الحياتية متى كانت  
المعادلة التي يراد حلها مرتفعة الدرجة وذلك لطول  
الحسابات التي يلزم اجراؤها لاجل تحصيل المعادلة التفاضلية  
ويمكن الآن الاستغناء عن هذه المعادلة بنظرية شهيرة استكشفها  
المهندس بطورم تصدى لذكرها فقولوا —

نظرية المهندس بطورم واستعمالها  
في البحث عن الجذور الحقيقية

سند يفرض أن  $Q = 0$  معادلة بأي درجة جميع جذورها  
غير متساوية ويجعل  $Q$  رمزاً للدلالة الشقة من  $Q$  ثم  
تجرى على  $Q$  عملية كعملية القاسم المشترك الأعظم  
بحيث لا تختلف عنها الا بتغيير علامات البواقي عند تنزيلها  
منزلة



ق ر ق ر ق ..... ق ر ق

بعدد من موجبين أو سالبين كالعدين ل، س، فيكون  
أصغر من س كان عدد مغايرات علامات الدلالات المذكور  
بالنسبة الى س = س ما وبأ في النهاية لعدد مغايرات  
علامات تلك الدلالات بالنسبة الى س = ل فان كان أصغر  
منه كان الفرق بينهما مساوياً لعدد الجذور الحقيقية النسوية  
للعادلة ق = ٠ والمحمورة بين ل، س

وللبرهنة على هذه النظرية يلزم اختبار الكيفية التي بها  
يتغير عدد المغايرات المتكونة من علامات الدلالات  
ق، ر، ق، ر، ق، ..... في المعلوم الرتبة بالنسبة لاي مقدار  
يفرض للتغير س متى فرض لهذا المتغير جميع المقادير المتنوعة حيث  
انه لا يمكن حصول تغير في علامات المفروضة عندما يأخذ س  
في الازدياد بقدر تغير الاسم واحدة من الدلالات  
ق، ر، ق، ر، ق، ..... وبما على ذلك تكون هذه الدلالة معدومة  
فتستبط من ذلك حالان ينبغي اختبارها وذلك بحسب ما يكون  
الدلالة المعدومة هي الدلالة الاولى ق أو واحدة من الدلالات



فيثبت انه لا يشترط ان تكون للثلاثة الصغيرة و مقدار فيمكن جعل  
 هذه الثمينة صغيرة جداً بحيث يكون علامة تحليل المقدار  
 (أ-و) ارتباط بعلامة حد ها الأول (كما في (ب) و (ج) و (د)  
 يكون المقدار (أ-و) متحد في العلامة مع - و (أ-و)  
 وبناء على ذلك متخالفاً في العلامة مع (أ-و) وحيث ان المقدار  
 (أ-و) و (أ-و) متحدان في العلامة فيكون المقداران  
 (أ-و) و (أ-و) متخالفين في العلامة واذاً يكون المقدار  
 ق، في متخالفين في العلامة بفرض  $س = ح - و$   
 فاذا وضع + بدل - و في تحليل المقدار السابق حدث  
 $س = (و + و) = \frac{ق}{٢} + (أ-و) + \frac{ق}{٢} + (أ-و) + (أ-و) + (أ-و)$   
 وحينئذ يشاهد ايضاً أن المقدار (أ-و) متحد في العلامة  
 مع المقدار (أ-و) وكذا مع المقدار (أ-و) وبناء على ذلك  
 يكون المقداران ق، في متحدين في العلامة بفرض  
 $س = ح + و$

ومن هنا يتخذ بفرض  $س = ح$  انه اذا كان المقدار (أ-و)  
 أو ق مسبوفاً بعلامة + كان المقدار ق مسبوفاً بعلامة

(٧٧)  
 في ر في الخ لان الدلالة الاخيرة في لا تكون معدومة  
 سبب في يدل على عدد

### الحالة الاولى

ولنتخذ الآن التغير الواقع في العلامات متى وصل المتغير من  
 الآخذ في الازدياد بالتدريج الى مقدار به تصير الدلالة  
 في مساوية للصفر أو زاد عن هذا المقدار فان وضع هذا المقدار  
 المفروض للتغير من بعد بيانه بالرمز ح في الدلالة المشتقة  
 في فان هذه الدلالة تؤول الى عدد موجب أو سالب  
 حيث ان المعادلة  $ق =$  ليس لها بالقرض جذور متساوية  
 فاذا جعل  $و$  رمز القيمة موجبة صغيرة بالكتابة بحيث  
 لا يكون للمعادلة  $ق =$  جذور محصورين  $ح - و$  و  $ح + و$   
 فلا تنفي علامة الدلالة في متى جعل  $ق = ح - و$  و  $ق = ح + و$   
 $ق = ح + و$

اذا تقر هذا ومن المقدار في بالرمز د (س) والمقدار في  
 بالرمز د (س) تحصل ملاحظة ان  $د (ح) =$   
 $د (ح - و) = - \frac{ق}{1} د (ح) + \frac{ق}{x_1} د (ح) - \frac{ق}{x_1 x_2} د (ح) + \dots$   
 حيث

(٤٧٣)

في فرض  $S = H$  مع الدلالة في  
ولتتحدى الاختبار ما يتربح حصوله عندما تكون واحدة  
من هذه الدلالات معدومة فنقول —

الحالة الثانية

إذا فرض أن  $H$  هي الدلالة التي انعدمت من بين الدلالات  
في فرض  $S = H$  يقال أن هذا المقدار المنروض للتغير  $S$   
لا يمكن بواسطته جعل الدلالة  $H$  السابقة على الدلالة  
في مساوية للصفر وكذا لا يمكن بواسطته جعل الدلالة  
في التالية لهذه الدلالة مساوية للصفر لأنه لو تأتى حصول  
ذلك انقسم المضروب  $S - H$  في  $H$  واحد كلاً من الباقيين  
المتوالين  $H - 1$  و  $H$  أو في  $H$  و  $H - 1$  وجنيد يكون  $S - H$   
مضروباً مكرراً في القيمة الكبيرة للحدود  $H$  وهذا محال لأنه  
قد فرض أن المعادلة  $S = H$  لا تكون لها جذور متساوية  
وبناء على ذلك تتوَل الدالتان  $H - 1$  و  $H$  في فرض  $S = H$   
العدد من متخالفين في العلامة كما يتحقق ذلك بالتأمل في المعاد  
 $H - 1 = H - H$  في

بفرض  $s = -d$  و مسبوقاً بعلامة + بفرض  $s = +d$  وهو  
 فان كان المقدار  $q$  مسبوقاً بعلامة - بفرض  $s = +d$  كان  
 المقدار  $q$  مسبوقاً بعلامة + بفرض  $s = -d$  و مسبوقاً  
 بعلامة - بفرض  $s = +d$  و كما يشاهد ذلك كله بالجدول  
 الآتي وهو

|     |     |          |          |
|-----|-----|----------|----------|
| $q$ | $q$ | $s = -d$ | $s = +d$ |
| $+$ | $+$ | $+$      | $+$      |
| $-$ | $-$ | $-$      | $-$      |
| $+$ | $+$ | $+$      | $+$      |
| $-$ | $-$ | $-$      | $-$      |

وبناء على ذلك اذا كان  $d$  جذراً للمعادلة  $q = 0$ ،  $s = 0$   
 من علامتي المقدارين  $q$  و  $d$  مغايرة قبل أن يصل المتغير  
 $s$  الى المقدار  $d$  وهذه المغايرة تكون مداومة بعد  
 أن يتجاوز هذا المتغير عن المقدار  $d$  المذكور  
 واما الدلالات الأخرى  $q$  و  $p$  و  $x$  فان كل واحدة منها  
 تكون كالدلالة  $q$  مسبقة في فرض  $s = -d$  و  $+$  أو  
 $s = +d$  و بالعلامة التي يلزم ان تكون مسبقة بها في  
 فرض  $s = -d$  اذ لم تنعدم واحدة ما من هذه الدلالات  
 في فرض

الطلائع السريانية في  
غير مغارة واحدة

وبناء على ذلك يمكن من علامات جميع الدلائل في ...  
في فرض س = د و مع اirt بقدر ما يتكون من علامات هذه  
الدلائل مع اirt في فرض س = د و حينئذ اذا كانت  
واحدة من الدلائل تميز لغيره فلا يبرهن عدد العايرات  
التي هي اirt علامات عالم يكن المقدار اعز و هو متغير من الدلائل  
يقرب عليه جعل هذه الدلالة مساوية لغيره من سببا في ذلك  
الدلالة الاولى في مساوية للصفر ايضا لانه يشاء في هذه  
الحالة عن تغيير علامة هذه الدلالة حذف واحدة من العايرات  
عن اirt العلامات كما سبق اثبات ذلك في حالة الاولى  
ومثل هذا ينأى في حصوله اذا تعدت عدة الدلائل متوالية  
غير متجاورة في فرض س = د

وحيث فقد ثبت انه كلما وصل المتغير من الآخذ في الازدياد  
بكمية غير محسوسة الى مقدار وزاد عن هذا المقدار الذي  
يُصير الدلالة في ماوية للصفر ثرت على ما مات

(٤٧٤)  
 انتهى من المعادلات (١) المقدمة (في سبيل) لأنه ينتج من  
 هذه المعادلة أن

$$ق = - ق \quad \text{عندما تكون} \quad ق = ١+2$$

إذا قدر هذا ووضع بدل  $س$  عددان كالعديدين  $-و$  و  $و$   
 $+و$  والذين يختلفان عن  $و$  اختلافاً كبيراً كان للدالتين  
 $ق$  و  $ق$  بالنسبة لهذين المقدارين المفروضين للتعديل  
 $س$  عين العلامتين اللتين تكون لهما في فرض  $س = و$  لأنه  
 يمكن جعل  $و$  صغيراً بالكتابة بحيث لا تتغير علامة كلتا  
 الدالتين  $ق$  و  $ق$  عندما يأخذ التعديل  $س$  في الزيادة  
 من  $-و$  الى  $+و$  ومن هذا يؤخذ على أي وجه كانت  
 علامة الدلالة  $ق$  في فرض  $س = و$  و لكنهما موضوعا  
 بين علامتي  $ق$  و  $ق$  المتخالفتين أنه يتكون دائماً  
 من علامات الدلالات الثلاث المتوالية  $ق$  و  $ق$  و  $ق$   
 في فرض  $س = و$  و مداومة ومغايرة أو مغايرة  
 ومداومة وبمثل ذلك يبرهن مما كانت علامة الدلالة  $ق$   
 في فرض  $س = و$  و على أنه لا يتكون من علامات الدلالات  
 الثلاث



لا تعتبر في هذه الحالة غير مغايرات علامات جميع الدلالات وأما  
الدلالة التي انعدمت فيقطع النظر عنها لانه قد سبق انه اذا انعدمت  
الدلالة في فرض من حال واستغوص المتغير من بكمية  
تختلف عن ل بغير فانه يتكون دائماً من علامات الدلالات  
في  $ق$  في  $ق$  في  $ق$  مغايرة ومداومة وهذه المغايرة لانعدام  
عند قطع النظر عن علامة الدلالة في  $ق$

### النتيجة الاولى

يمكن بواسطة النظرية السابقة معرفة عدد الجذور الحقيقية للعادلة  
وذلك بأن يؤخذ بدل العددين اللذين يوضعان بدل  $س$   
النهايتان الكبريان للجذور الموجبة والالبة أو يكيان رقتان  
أكبر منهما ويمكن أيضاً قطع النظر عن كل استبدال لانه يمكن دائماً  
ان يفرض للمتغير  $س$  مقدار كبير بالنهاية بحيث تكون كل واحدة  
من الدلالات  $ق$  في  $ق$  في  $ق$  في  $ق$  متعدة في العلام  
مع حدها الأول (كما في ص ١٧١) وبناء على ذلك اذا لوحظت  
علامات الحدود الاول من الدلالات بفرض المتغير  $س$   
سلباً وعلامات هذه الحدود بفرض هذا المتغير موجباً كانت



(٤٧٩)

تكونت من علامات هاتين الدالتين مداومة عند فرض المتغير  
، موجبا تكونت من هذه العلامات مغايرة عند فرض هذا  
لتغير سالباً وبالعكس

من هنا يؤخذ ان يلزم لكي تكون جميع جذور المعادلة  $ق = ٠$   
بقيية ان تكون الحدود الاول من الدالات  $ق١$ ،  $ق٢$ ، و... وفي  
تحدة في العلامة

سند ولنطبق الآن نظرية المهندس اسطورم على بعض امثلة فنقول

المثال الاول

اذا فرضت المعادلة  $ق١ - ق٢ - ق٣ - ق٤ = ٠$  حدث

$ق١ = ق٢ - ق٣ - ق٤$

$ق١ = ٣ - ق٢ - ق٤$

ويلزم بحساب الدلالة  $ق١$  ان تقسم الدلالة  $ق١$  على  $ق١$   
ولتجد الكوثرية الدلالة  $ق١$  في  $٣$  فيحصل من

ذلك الباقي  $١٥ - ١٠ - ١٠$  وجنيد يكون

$ق١ = ١٥ + ق٢ + ق٤$

ويلزم بحساب الدلالة  $ق١$  ان تقسم الدلالة  $ق١$  على الدلالة

(545)

زيادة عدد مغايرات الحملة الاولى من العلامات عن عدد مغايرات  
الحملة الثانية منها هي عدد الجذور الحقيقية للمعادلة  
النسبية الثانية

للدلالة المساعدة في  $Q, R, P, \dots$  في عددها ما  
في العادة للدرجة الممثلة للمعادلة  $Q =$ . لانه يشاهد من  
البحث عن القاسم المشترك الأعظم بين  $Q, R$  ان كل باق تنقص  
رجته في العادة بواحد عن درجة الباقي السابق عليه وكلما كان  
عدالدالات  $Q, R, P$  ونحوها سوية للدرجة الممثلة للمعادلة  
لكن معرفة عدد الجذور التخيلية للمعادلة  $Q =$ . وذلك  
والنظر الى علامات الحدود الأولى من هذه الدالات  
حينئذ يكون للمعادلة  $Q =$ . ازواج من الجذور التخيلية بمقدار  
ايوجد من المتغيرات في جملة علامات الحدود الأولى من الدالات  
ساعة  $Q, R, P$  ونحوها الى الدلالة الثانية في وهذه العلاقة  
هل انما تباه بواسطة النتيجة الأولى وذلك لأني  
شاهد بمقتضى هذا الفرض ان إحدى الداليتين المتواليتين  
 $P, R$  زوجية الدرجة والاخرى فردية الدرجة بحيث

أَنَّ س = ١ + ٥٧ (كما في نسخة) فيكون الجذر محصوًّا  
 بين الصفر ٠ و ٤ ويؤخذ من الفرض س = ٤ فأتج سالب  
 ومن الفرض س = ٣ فأتج موجب وجنِّد يكون الجذر محصوًّا  
 بين ٤ و ٣ وسيأتى أنه يمكن بواسطة طرق بسيطة تحصيل  
 مقدار يقرب من المقدار الحقيقي بقدر ما يراد  
 ولما كان لا يترتب على خراب الدلالات ق، و ق، و ق، و ق صعوبة  
 في العمل وجب الاعراض عن إيراد ذلك هنا مفصلاً

### المثال الثاني

إذا فرضت المعادلة س - ٧ = ٧ + ٧ = ٠ حدث

$$ق = س - ٧ = ٧ + ٧ = ٠$$

$$ق = ٣ - س = ٧ = ٠$$

$$ق = ٤ - س = ٣ = ٠$$

$$ق = ١ = ٠$$

فإن كان مقدار المتغير س سالباً تكونت من علامات الحدود  
 الأول من الدلالات ق، و ق، و ق، و ق بجملة العلامات

+ - + -



(٤٨٣)

وجذران محصوران بين ١ و ١٠

واذا فرض أن  $s = e$  تكونت من ذلك جملة العلامات

(٤) ..... + + + +

ويؤخذ من مقارنة هذه الجملة بالجملة المتكونة من فرض  $s = 1$   
إن الجذرين الموجبين يكونان محصورين بين ١ و  $e$  فإذا فرض  
أن  $s = e$  ١ كان للدلالة  $q$  مقدار سالب وبناءً على ذلك  
يكون أحد الجذرين الموجبين محصوراً بين ١ و  $e$  ١ والآخر  
بين  $e$  ١ و  $e$

وأما الجذر السالب المعتادة المفروضة فيتحصل له نهايتان متعاكستان  
بقدر ما يراد وذلك بأن يوضع بدل المتغير في الدلالة  $q$  وهذا  
أعداد مستووعة فإن كانت الأعداد التي يوضع بدل المتغير صحيحة  
كان الجذر محصوراً بين ٣ - و ٤ -

واذا وضع المقدار  $s = e$  ١ في الدلالات الثلاث  $q$  و  $q$  ١ و  
انعدمت الدلالة الأخيرة وتكونت من ذلك جملة العلامات

(٥) ..... - - +

فإذا قطع النظر في هذه الجملة عن علامة الصفر تكونت منها مغايرة

وان كان مقدار المتغيرين موجباً تكونت أيضاً من علامات هذه الحدود  
جمله العلامات

++++

وحيث انه يتكون من جمله العلامات الاولى ثلاث مغايرات  
والثانية لا يتكون منها مغايرة ماً فتكون جذور المعادلة الثلاثة حقيقية  
ولاجراً، عملية استخراج الجذور يفرض بالنوال ان  $s = -10$   
فكون علامات الدالات  
ق، ق، ق، ق، ق، ق بالنسبة الى هذه المقادير المفروضة للمتغير  
س هي الشاهدة في الجدول

ق ق ق ق ق

(١٠-) ..... + - + -

(١-) ..... + - - +

(٠) ..... + - - +

(١) ..... + - - +

(١٠) ..... + + + +

ومن هنا يعلم أن المعادلة المفروضة لها جذور محصورة بين -١٠ و -١





(٤٨٤)

واحدة وجيند ينقص عدد مغايرات هذه الجحلة مغايرة واحدة  
عن عدد مغايرات المتكونة من فرض  $s=1$  ويزيد عدد هذه  
المغايرات واحدة عن عدد مغايرات الجحلة المتكونة من فرض  
 $s=2$  وهذا موافق للتنبيه المتقدم (في ص ٨٧)

### المثال الثالث

اذ افرضت المعادلة  $ش - ٤ ش - ٣ ش - ٣ ش + ٤ ش = ٠$  حد

$$ق = ش - ٤ ش - ٣ ش - ٣ ش + ٤ ش$$

$$ق = ش - ٤ ش - ٣ ش - ٣ ش + ٤ ش$$

$$ق = ش - ٤ ش - ٣ ش - ٣ ش + ٤ ش$$

$$ق = ش - ٤ ش - ٣ ش - ٣ ش + ٤ ش$$

$$ق = ش - ٤ ش - ٣ ش - ٣ ش + ٤ ش$$

وهذا جدول العلامات التي تأخذها هذه المشتقات  
بالنسبة للمقادير المتنوعة المفروضة للتغير  $s$

١٠

## أشكال الرابع

لما لم يحد أي جاد بشرط من اللازم من يجعل جاداً و العادلة

ق + ح + س + ك = . كلها حقيقية أثبتت

$$ق = ك + ح + س + ك$$

$$ق = ٢ + ح + س$$

$$ق = - ٤ - ح - س - ٣ ك$$

$$ق = - ٤ - ح - ٧ ك$$

وحيث يلزم لكي تكون الجذور الثلاثة للعادلة للفروضة حقيقية

ان تكون الحدود الأول من الدلالات ق ، ق ، ق ، ق بالة

لمقدار سالب مفروض للتغير من مسبوقه بعلامات لا تكون

منها الا مغايرات ومسبقه بالنسبة لمقدار موجب مفروض

للتغير من بعلامات لا تكون منها الا مداومات فاذا إذا

كان مقدار المتغير س سالباً كان الحد الأول من الدلال

ق مسبوقاً بالعلامة - والدلالة ق مسبوقه بالعلامة

+ وإذا يلزم ان يكون الحد ح س مسبوقاً بالعلامة

وتكون الدلالة ق التي هي كية ثابتة مسبوقه بالعلامة

أما الصف الثالث والرابع فانهما يتكونان من فرض  $s = 10$  و  $s = 1$   
 بحيث يعلم بالتأمل في هذين الصنفين ان المعادلة المفروضة  
 يكون لها جذران حقيقيان محصوران بين ١ و ١٠  
 وحيث أن جملة العلامات المتكونة من فرض  $s = 10$  عيت  
 الجملة المتكونة من علامات الحدود الأول من الدلالات بفرض  
 مقدار موجب للتغير  $s$  فلا توضع في المعادلة بدل هذا المتغير  
 أعداد تزيد عن ١٠ وحيث يكون العدد ١٠ هو النهاية  
 الكبرى للحدود الموجبة للمعادلة المفروضة  
 وبناء على ذلك يكون للمعادلة جذران حقيقيان وجذران  
 تخيليان فاذا كتبت ايضاً جملة العلامات المتكونة من فرض  
 $s = 1$  ثم كتبت جملة العلامات المتكونتان من فرض  
 $s = 3$  و  $s = 4$  و  $s = 5$  شوهد أن أحد جذري المعادلة يكون  
 محصوراً بين ٣ و ٤ والآخر اكبر من ٣ وحيث يمكن  
 تحصيل نهايات قريبة من النهاية ٣ هذه وذلك  
 بالاقترار على الدلالة ق

في ق وفي ن في هـ في و في ي  
فيكون عدد الجذور الحقيقية =  
لـ ما رويا للفرق بين عدد مقابرات جملة  
العلامات المتكوثة من وضع العدد ل بدل المتغير س  
عن عدد مقابرات جملة العلامات المتكوثة من وضع العدد  
بدل المتغير س

ويكفي لبيان هذه الخاصية أن يثبت على أنه يمكن أن تطبق على  
الجملة الجزئية للدلالات  $ق \vee ق \vee \dots \vee ق$  في البرهنة  
التي تقدمت في الجملة الكلية للدلالات  $ق \vee ق \vee \dots \vee ق$  في  
 $ق \vee \dots \vee ق$  في التجربة أن الأخيرة منها دالة على عدد ثابت  
والدلالة في لانتزال مسبوقة فهذا الفرض بعلامة  
واحدة بدون أن يكون لها مقدار ثابت بالنسبة للمقادير  
التضاعفية المفروضة للتغير من مبادئ إلى  
وحيث أن جملة علامات الدلالات  $ق \vee ق \vee \dots \vee ق$  في  
تعدم منها مغايرة كل انعدم الدلالة  $ق$  وأن انعدام  
الدلالات المتوسطة بين  $ق$  و  $ق$  لا يقترب عليه زيادة

ومن هنا يتج أن

$$8 > ٤٥ + ٧ > ٤٧ > ٤٨$$

وهذان الشرطان كافيان في العمل لانهما ان تحققا لم يحصل من علامتا  
الحدد الأول للدلالات في  $٧$  و  $٤٧$  و  $٤٨$  في بالنسبة لمقدار  
موجب مفروض للتغير من غير مداومات

وبالجملة فانه يؤخذ من النتيجة الثالثة المقدمة (في س٨٧)

ان هذين الشرطين ضروريان وكافيان في العمل  
وما ينبغي التنبيه عليه أن الشرط الأول داخل في الثاني لانه  
الحده  $٧$  كما كان دائماً موجباً كانت الكمية  $٤٧ + ٧$  كما  
دائماً موجبة مالم يكن  $٤٧$  كمية سالبة

س٨٨ اذا كانت واحدة من الدلالات المساعدة كالادلة  
في المتوسطة بين  $٧$  و  $٤٧$  مسبوقة دائماً بعلامة واحدة  
بالنسبة لساير المقادير المفروضة للتغير من التي تكون محصورة  
بين  $٧$  و  $٤٧$  فلا حاجة الى اعتبار الدلالات التالية لهذه  
الدلالة لانه يكفي لذلك ان يوضع العددين  $٧$  و  $٤٧$  بدل  
التغير من في الدلالات ذات الدرجة العظمى وهي



عدد المقايير ولا نقصه فيكون للعادلة  $ق = جذو$   
محصورة بين  $ل$  و  $هـ$  بقدر المقايير التي تزيد بها حلة  
العلامات المتكونة من وضع العدد  $هـ$  بدل المتغير  $س$   
عن حلة العلامات المتكونة من وضع العدد  $ل$  بدل المتغير  
 $س$  وحيث ان النظرية السابقة قد صارت بسيطة كما هو شاهد  
هنا فلا صعوبة في استعمالها لانا اذا بحثنا عن القاسم المشترك  
الاعظم بين  $ق$  و  $هـ$  في توصلنا الى كمية كثيرة الحدود كالكمية  
في (ذات الدرجة الثانية مثلاً) التي لما كانت ماوية  
للمصغر لم يتحصل منها للتغير  $س$  غير مقادير تخيلية وحينئذ  
لا حاجة الى توالي عمليات القسمة لان هذه الكمية كثيرة الحدود  
في  $ق$  لا تزال متحدة في العلامة مع حدها الاول بالنسبة لـ  $ق$   
المقادير الحقيقية المفروضة للتغير  $س$  وبناء على ذلك يمكن  
اخذ تلك الكمية بدل الدلالة الأخيرة من الدلالات المساعدة  
في  $ق$  و  $هـ$  و  $ل$  ويمكن ايضاً الاقتصار على كمية كثيرة الحدود كالكمية  
في التي تعدم بالنسبة لمقادير حقيقية تفرض للتغير  $س$   
بشرط ان لا يتعذر تعيين جميع هذه المقادير لانا اذا رمزنا  
بالموز





على انعدام الدلالات المتوسطة وقوع تغيير في عدد المقادير  
 هذه الجملة غير انه يلزم اذا كان عدد المقادير ثلاثة بالابداء عند  
 ما يستعرض المتغير في هذه الدلالات بالعدد من ل إلى  
 ان الدلالة في تكون مبنوية بعلامة واحدة بالنسبة للمقادير  
 المتزايدة المفروضة للمتغير من بالابتداء من ل إلى ل + ١  
 لان هذه القضية لا تتحقق الا في الحالة التي تكون فيها المجموع  
 جذور المعادلة ق = ٠ حقيقية

٧١٠ وقد فرضنا الى هنا ان المعادلة المفروضة ق = ٠  
 ليس لها جذور متساوية غير ان النظرية المقدمة (٢٧٨) في  
 لانزال مستعلة وان لم يتحقق هذا الشرط

ولبيان ذلك يفرض انه يكون للمعادلة جذور متساوية  
 وان تجرى على الجذرين ق ر في عملية مشابهة للعلية المقدم  
 (٢٨٦) فيتوصل الى باق كالباق في يكون دلالة للمتغير من  
 ونقسم الباقي السابق عليه في قسمه بلا باق فاذا يكون  
 الباقي في هو القاسم المشترك الأعظم بين ق و ق  
 واذا يكون قاسما قسمه بلا باق لكل من البواقي المتوالين

لعدد من  $L$  و  $S$  التي تأتي بالنسبة إليها خارج قسمة  $Q$   
 إلى الجواب و  $Q$  هي هنا عادلة من الحد والمحصور  
 $L$  و  $S$  التي ينتج عنها خارج لقسمه المذكور  
 لا يجاب إلى الب فانها  $S$  أو  $L$  للفرق بين عدد  
 ابرات المتصلة من جملة علامات الدالات  $Q$  في  $Q$   
 و  $Q$  في فرض  $S = L$  وبين عدد مغايراتها في فرض  
 $S =$

حينئذ لا يمكن ان يكون عدد ما للعادلة  $Q =$  من الحد والمحصور  
 $L$  و  $S$  أصغر من الفرق كما بين عدد من المغايرات  
 لا بين وانما يمكن ان يكون  $S$  أو  $L$  أو أكبر منه بعدد زوجي  
 يتم لكي يكون  $S$  أو  $L$  بالضبط ان تكون الدلالة  $Q$  مشتقة  
 من الدلالة  $Q$  أو ان تكون دلالة متحدة في العلامة مع هذه  
 الشقة او متخالفة معها في العلامة بالنسبة لكل مقدار تحقق  
 فرض المتغير  $S$  ويكون محصورا بين  $L$  و  $S$  وعليه يترتب  
 عدم الدلالة  $Q$  وحيث ان مثل هذه الدلالة ليست معلومة  
 ابتداء الأمر فيلزم أن تؤخذ بدل الدلالة  $Q$  الدلالة الشقة

(٢٥٥)

يتحقق بها أيضاً المعادلة (١) المتقدمة (في ص ٢٢٢) شوهدها  
أخذ المتغير  $x$  في الازدياد حتى وصل أو زاد عن مقدار كالمقدار  
الذي به تنعدم الدلالة في  $x$  يمكن أن نحاج قسمة  $\frac{1}{x}$   
من السلب إلى الإيجاب أو من الإيجاب إلى السلب أو أنه يكون  
وإذاً علامته الأصلية فأما في الحالة الأولى وهي الانتقاص  
السلب إلى الإيجاب فإن جملة علامات الدلالات  $x, \frac{1}{x}, \dots$   
يترتب عليها انعدام مغايرة من جهتها اليمنى وأما  
في الحالة الثانية وهي الانتقال من الإيجاب إلى السلب فإنه يترتب  
عليها زيادة مغايرة في جهتها اليسرى وأما في الحالة الثالثة  
وهي أن الخارج يكون ملازماً لعلامته الأصلية فإن عدد مغاير  
جملة العلامات المذكورة لا يتغير وجنيد لا ينشأ عن انعدام  
واحدة من الدلالات المتوسطة بين الدالتين  $x$  و  $\frac{1}{x}$  زياد  
ولا نقص في عدد المغايرات ومن هنا تستنبط النظرية الآتية  
التي تستعمل بدال النظرية المتقدمة (في ص ٢٢٢) عندما تكون الدلالة  
في  $x$  ليست مشتقة من الدلالة  $Q$   
وأما الفرق بين عدد مآلات الدلالة  $Q$  = مآلات الجذور المحصورة

هندس اطورم في نظريته فقول

يث أن في دلالة مشتقة من ق في شاهد كاتقدم انه  
بالانتمت الدلالة في هذه في فرض  $S = H$  كانت متخالفة

بالعلامة مع الدلالة في في فرض  $S = H - O$  ومضادة معها

بالعلامة في فرض  $S = H + O$  ويمكن لبيان ذلك أن يقال

على وجه الاختصار ان خارج قسمة  $\frac{H}{O}$  ينتقل دائماً من اللب

الى الايجاب متى انعدمت الدلالة في

وقد انضمت الآن ان الدلالة في ليست مشتقة من الدلالة في

وانما هي نتيجة كثيرة الحدود درجاتها دون درجة في وانها

لا تنبثق على مضروب حقيق بدرجة او لما يكون مشتركاً بينها

ويبين في فانه يمكن استعمال هذه الكمية الكثرة الحدود في

في كثير من الكمية الكثرة الحدود واخرى كالكليات في رقي والحج

التي يمكن دونها الى الدرجة وتكون درجاتها مكونة لتواليبة

تتأزلية ردت بواسطة عمليات قسمة متوالية كما سبق في

الكمية الكثرة الحدود والمشتقة (الهندسية)

واذا لوحظت لجملة التكون من الدلالات في في رقي و  $H$  في

لان الدلالات في  $ق$  في  $ق$  في  $ق$  في  $ق$  المساوية بالنسبة للاحداث  
 $ط$   $ط$   $ط$   $ط$  في  $ق$  مضروبة في  $ق$  تكون بالنسبة لمقدار  
مخصوص مفروض فيها للتغير من متحدة في العلامة مع الدلالة  
 $ط$   $ط$   $ط$   $ط$  في  $ق$  أو متخالفة معها في العلامة بحسب ما يكون  
الدلالة في موجبة أو سالبة بالنسبة لهذا المقدار وبناءً  
على ذلك يكون عدد المغيرات المتحصلة من علامات الدلالات  
 $ق$   $ق$   $ق$   $ق$  في  $ق$  في  $ق$  بالنسبة لأي مقدار يفرض للتغير من مساوياً  
دائماً لعدد المغيرات المتحصلة من علامات الدلالات  $ط$   $ط$   $ط$   
 $ق$   $ق$  في  $ق$

وجنث إذا فرض بالتوالي للتغير من في الدلالات  $ق$  في  $ق$  في  $ق$   
 $ق$  ....  $ق$  في المقداران  $ل$  و  $س$  (بجعل  $ل$  أصغر من  $س$ )  
كأن الفرق الذي يزيد به عدد المغيرات المتحصلة من فرض  
 $س = ل$  من عدد المغيرات المتحصلة من فرض  $س = س$   
ساوياً لعدد الحدور المختلفة للمعادلة  $ق = ل$  المحسوبة  
بين  $ل$  و  $س$  وذلك بقطع النظر من درجة تكرار كل حد  
بحد ولنتصد لذكر واحدة من الملاحظات المتنوعة التي أبدتها  
المهندسون

[illegible]

ط و هـ الطاء كذا في المتن من المتن

في العلامة في فرض س = هـ - و و محمد في في العلامة

في فرض س = هـ + و

مثلا اذا فرض أن

$$ق = (س - ح)^2 (س - ي)^2 (س - هـ) (س - ع)$$

حدث (كافي، ص ٢٤٤)

$$\left. \begin{aligned} & 2 (س - ي) (س - هـ) (س - ع) \\ & 2 (س - ي) (س - هـ) (س - ع) \\ & (س - ي) (س - هـ) (س - ع) \\ & (س - ي) (س - هـ) (س - ع) \end{aligned} \right\} \times \begin{aligned} & 1 - 2 (س - ي) \\ & 1 - 2 (س - ي) \\ & 1 - 2 (س - ي) \\ & 1 - 2 (س - ي) \end{aligned} = ق$$

وبملاحظة أن ق = (س - ح)^2 (س - ي)^2 (س - هـ) (س - ع) يؤشرون من مقدار

ق و في المتقدمين

ط = (س - ح) (س - ي) (س - هـ) (س - ع)

$$\left. \begin{aligned} & 2 (س - ي) (س - هـ) (س - ع) + 2 (س - ي) (س - هـ) (س - ع) \\ & (س - ي) (س - هـ) (س - ع) + (س - ي) (س - هـ) (س - ع) \end{aligned} \right\} = ط$$

اذا انقر



فإذا فرضنا هذه البكّة القوسية بالوزن  $m$  والمعادلة بالدلالة  $(\text{ح}) =$   
 وفرض أن  $S = \text{ح} + \text{ص}$  آتت سلسلة متقوية على  $S$  إلى  
 (1)  $\dots (\text{ح}) + \text{ك}(\text{ح}) + \text{ص} + \text{ك}(\text{ح}) \frac{m}{2} + \text{ك}(\text{ح}) \frac{m}{2} + \frac{m}{2} + \text{ك}(\text{ح}) =$   
 وإذا استخرج من هذه المعادلة بمقدار  $\text{ص}$  بفرض الحيات  $\text{ص} = \text{ص}$   
 فيخرج معلومة حدث

$$\left[ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right] (x)^2 + \frac{1}{x} (x)^2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \dots \quad (6)$$

و- يثبت مقدار من الذي يراى تحمله كذا دون العشرين فيكون  
 له من الارض اربعة اصباع اقوم بـ اربعة اصباع في  
 مقدار من الذي يراى تحمله كذا دون العشرين فيكون

1000

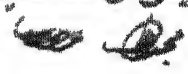
[illegible]

—

ق اذارين، تعيين الجذور الحقيقية للمعادلة  $Q =$  مع مزيد النقط

في الطريقة التقريبية للمهندس نوتون

يسند متى علم ان جذر معادلة محصور بين عددين كالعدين  $L$  و  $R$   
 وكان لا يخصص بين هذين العددين الا جذر واحد فاسهل طريقة  
 توصل الى اقرب مقدار لهذا الجذر هي ان يوضع على التوالي بدل المتغير  
 في المعادلة اعداد اخر محصورة بين العددين المذكورين مثلاً  
 اذا فرض انه وضع بدل المتغير عدد كالعدد لا المحصور بين العددين  
 $L$  و  $R$  علم من علامة الناتج هل الجذر محصور بين العددين  
 $L$  و  $R$  او بين العددين  $R$  و  $L$  فان كان محصوراً بين العددين  
 $R$  و  $L$  فانه يوضع فيها بدل المتغير كقيمة  $Q$  ومن  
 هنا يعلم هل الجذر محصور بين  $R$  و  $L$  او بين  $L$  و  $R$   
 وتبذل العملية حصراً الجذر بهذه المتابعة يتوصل الى تقدير  
 هذا الجذر بالتقريب المطلوب ومتى تحصل بالطريقة المذكورة  
 مثل هذا التقريب سهل توالى العمل بالطريقة الآتية المنسوبة  
 للمهندس نوتون وهي

ليفرض هنا انه يراد تحصيل مقدار يكون دون الجذر ومثولة اشارة  
 بها  فاذا امر

سند ونكتي تكون هذه الطريقة مضبوطة يلزم ان يتحقق انه اذا  
مقدار ص و وضع بدله في المعادلة فلا يكون للمحدود محتوية  
على ص و ص و الح ارتباط بالاجزاء الثانية من مقدار الطرف  
من هذه المعادلة وحيث أنه لا يتأق مثل ذلك في كثير من الأحوال  
وانه ربما تحصل بدل المقدار التقريبي الذي يزداد تحصيله للجذر  
مقدار يبعد عن المقدار الحقيقي كبر فيزم حينئذ ان يحقق بعد كل  
تقريب هل جميع الأقسام التي حست تنسب كلها المقدار الجذر  
المطلوب ام لا

فاذا لوحظ في مبداء الأمر المقدار في الحادث من التقريب  
الأول المبين برقين اعشاريين فانه يلزم ان يوضع هذا  
المقدار بدل المتغير في المعادلة واذا علم بواسطة علامة الناتج  
عند مقارنتها بعلامات النواتج الحادثة من الاستبدالات  
التي اجريت فيما سبق ان الجذر اكبر من القيمة في أو أصغر منها  
لزم ان يوضع في المعادلة بدل المتغير في + بـ أو - بـ  
فاما ان كان الناتج الحادث من هذا الاستبدال الثاني متخالفا  
في العلامة مع الاستبدال الأول فانه يثبت ان القيمة لا تختلف

(٥٠٤)

وحيث أن مقدار  $\sqrt{}$  المتحصل هو كمية دون  $\frac{1}{2}$  فتكون كلتا الكميتين  
ص  $\frac{1}{2}$  أقل من  $\frac{1}{2}$  ولذا يجب مقدار  $\sqrt{}$  الى  $\frac{1}{2}$   
ثم يضاف الناتج الى الكمية  $\frac{1}{2}$

فان كان مقدار  $\sqrt{}$  المتحصل مقرباً من  $\frac{1}{2}$  فانه يستعمل بهذه  
المتابعة في حساب مقدار تقريبي آخر وفي هذه الحالة تجرى عملية  
القسمة التقريبية الى الخانة الثامنة من الاعداد ثم يتوالى  
العمل على هذا المنوال ويضعف كل عملية عدد اعداد مقدار  $\sqrt{}$   
الى ان ينوصل الى درجة التقريب المطلوبة

وينبغي في العمل ان يلاحظ ان التقاربات المتوالية تعلم كلها من قانون  
واحد وجنّد اذا وضع على العموم

$$ص = \frac{ص(س)}{ص(س)}$$

لزم في مبداء الأثر ان يوضع  $\sqrt{}$  بدل  $\sqrt{}$  ثم يجب مقدار  $\sqrt{}$  الى  
 $\frac{1}{2}$  ويضاف الناتج الى  $\sqrt{}$  فيحصل من ذلك المقدار الثاني  
التقريبى للكمية  $\sqrt{}$  ثم يوضع  $\sqrt{}$  بدل  $\sqrt{}$  ويجب مقدار  $\sqrt{}$   
الى  $\frac{1}{2}$  ويضاف الناتج الى  $\sqrt{}$  فيحصل من ذلك المقدار  
الثالث التقريبى وهم اجل

التي ليست كافية وبناءً على ذلك إذا لم تطرأ في نهاية المطاف التوازي لأحوال  
متناقضة أمكن الاقتصار في العمل على تحقيق واحد. وذلك بأن نتج  
في مبدأ الأمر الأرقام الاعشارية الكافية للمقدار التقريبي المطلوب  
ولنمثل لذلك بالمعادلة

$$س - ٤ - ٥ = ٥$$

التي يثابدها بتقضي تقدم أنه لا يوجد لها غير جذر حقيقي  
واحد محصور بين ٤ و ٥. إذا بحث عنه فوجب هذه الطريقة  
تَحْمَل

$$س = ٤٩١٥٥١٤٩٠$$

في الطريقة التقريبية للمهندس لاجرا نج  
سند الطريقة التقريبية للمهندس لاجرا نج لا تؤخذ منها  
عین الفائدة التي تؤخذ من طريقة المهندس بونون من جهة  
الاختصار في الأعمال لكنها مجردة عن الخطأ  
مثلاً إذا فرض أن  $س = ١٠٠ + ١$  كفاية عن عدد من متواليات  
محصور بينهما جذر واحد للمعادلة وفرض أن  $س = ١٠٠ + \frac{١}{١٠٠}$   
فإن المعادلة الناتجة المحتوية على  $س$  كالمعادلة الجذرية أكبر من

عن الجذر لا بمقدار  $\frac{1}{10}$  واما ان كان الناجحان متعدين في العلامة  
فانه يعلم من ذلك ان التقريب فيه خطأ أو أنه غير كاف وجيء  
يلزم لاستعمال الطريقة نوتون أن يبدأ بمقدار مقرب بقدر الامكان  
وذلك بان يبحث عن رقم الاجزاء المائنية بالمثابة المعروفة في اول  
البند السابق

وعلى هذا المثال يجري العمل في المقادير الحادثة من باقي التقاريب  
أعني انه يلزم بعد اجراء كل عملية ان يوضع في مبداء الأمر بدل المتغير  
المقدار المختص ثم يوضع بدل المتغير ايضا المقدار مضاعفا اليه  
أو مطروحا منه رقم آخر مرتبة فان كان لا يتحصل من التقريب  
الثاني الذي يؤخذ فيه أربعة ارقام اعشارية مقدار مقرب من  
المقدار الحقيقي بكثرة اقل من  $\frac{1}{10}$  قطع النظر عن الرقم الاعشاري  
الاخير وان كانت الارقام الباقية مضبوطة اجريت عملية  
تقريب آخر تمتد الى  $\frac{1}{1000}$  لكنه يقطع النظر فيه بعد  
العمل عن رقم أو رقمين من الارقام الاعشارية وبالجمله فلا يلزم  
تحقيق كل تقريب على الفور لان طريقة الحساب تكفي في الاعمال  
غالباً لبيان التقاريب المحتوية على الخطأ أو لتصلح التقاريب  
التي



(٥٠٦)

ولا يوجد بين جذور هذه المعادلة الا جذر واحد اكبر من الواحد لانه  
لو كان الامر بخلاف <sup>ذلك</sup> لوجد للتغير من عدة مقادير محصورة بين  
العدد من المتواليين  $١٤٥٥$  وهذا يخالف للفرض وجب  
يمكن تعيين الجذر الصحيح من مقدار  $١٤٥٥$  بأن نوضع بالتوالي في  
المعادلة المحتوية على  $١٤٥٥$  الاعداد الصحيحة  $١٤٥٥$   
وهكذا الى أن ينحصل ناتجان متخالفان في العلامة  
واذا فرض أن  $١٤٥٥$  كناية عن العدد  $١٤٥٥$  الذي يحدث  
منها الناتجان المتخالفان في العلامة وجعل  $١٤٥٥ = ١٤٥٥$   
فان المعادلة الناتجة المحتوية على  $١٤٥٥$  لا يكون لها غير جذر  
اكبر من الواحد وجب ان يمكن تعيين الجذر الصحيح من مقدار  $١٤٥٥$   
بواسطة اجراء علية مشابهة للعلية التي اجريت على  $١٤٥٥$   
فان كان  $١٤٥٥$  هو الجذر الصحيح من مقدار  $١٤٥٥$  جعل  $١٤٥٥ = ١٤٥٥$   
 $١٤٥٥$  وهلم جرا  
وبناء على ذلك يتوصل بواسطة مثل هذه الحسابات الى مقدار  
للتغير من يكون مبيثا بالكر المتسلسل



(٥٩)

بين ٤ و ٢ (كانتدم في ٢٠٠٠) فإذا افترضنا  $c = ٤ + \frac{1}{٢} \text{ حدث}$

$$\text{و (٤) } ١ = ٤ - ٤ \times ٢ = ١ - ٨ = -٧$$

$$\text{و (٤) } ١ = ٤ - ٢ \times ٢ = ٤ - ٤ = ٠$$

$$\frac{1}{٢} \text{ و (٤) } ٦ = ٤ \times ٢ = ٨$$

$$\frac{1}{٢ \times ٤} \text{ و (٤) } ١ = ٨$$

ومن هنا نأخذ المعادلة المحولة

$$\text{ص} - ١٠ \text{ ص} - ٦ \text{ ص} - ١ = ٠$$

التي يشاهد فيها بالسهولة من غير إجراء عملية الاستبدال انه يحدث من ص = ١٠ ناتج سالب وحيث انه يحدث من ص = ١ ناتج موجب (كانتدم في ٢٠٠٠) فيكون مقدار المتغير ص محصور بين ١ و ١٠ وحيث اذا فرضنا ان  $\text{ص} = ١٠ + \frac{1}{٢} \text{ حدث}$

$$\text{و (١) } ١ = ١ - ١٠ \times ٦ - ١٠ \times ١ = ١ - ٦٠ - ١٠ = -٦٩$$

$$\text{و (١) } ١ = ١ - ١٠ \times ٤ - ١٠ \times ٢ = ١ - ٤٠ - ٢٠ = -٥٩$$

$$\frac{1}{٢} \text{ و (١) } ١ = ١ - ١٠ \times ٢ = ١ - ٢٠ = -١٩$$

$$\frac{1}{٢ \times ٤} \text{ و (١) } ١ = ١$$

ومن هنا نأخذ المعادلة المحولة الثانية

للمعادلة المفروضة كان للمعادلة المحولة المحققة على من التحولة  
من فرض  $س = ح + \frac{1}{ص}$  عدة جذور أكبر من الواحد وجنيد  
لا يكون وضع الاعداد الصحيحة  $ا، ب، ج، د$  ونحوه بل بدل من  
كافاً لتعيين الاجزاء الصحيحة من مقادير  $ص$  لكن متى خرجت  
الجذور بأى طريقة سهل دائماً معرفة العدد الذى  
يلزم ان تضرب فيه الجذور والمحصورة بين تلك الاعداد الصحيحة  
لكى تسبدل بأعداد اخرى تكون اجزائها الصحيحة مختلفة  
عن بعضها وبهذه المثابة يؤول دائماً حساب المقادير التقريبية  
للجذور بواسطة طريقة لاجرانج الى ما سبق فاذا لم تكن فروق  
الجذور والمحصورة بين العددين الصحيحين المتواليين  $د، ح + ١$   
كثيراً صغيرة فانه يمكن اجراء العملية على المعادلة المفروضة  
كافى المثال الثانى

### المثال الاول

٤٩٨ عند اذ افترضت المعادلة

$$س^٣ - س - ٥ = ٠$$

شاهد أن هذه المعادلة ليس لها الجذر حقيقى واحد محصور  
مجموعه بين



(٥١٠)

$$٦١ ز - ٩٤ ز - ٤٠ ز - ١ = ٠$$

التي يتصل منها مقدار موجب بفرض  $ز = ٤$  ، وجنيد يكون  
مقدار  $ز$  محصورين  $١٥٠$  ، وعلى ذلك اذ جعل  $ز = ١ + \frac{١}{٣٠}$  حد

$$ت (١) = ٦١ \times ٦١ - ٩٤ \times ٦١ - ٤٠ \times ٦١ - ١ = ٥٤ \quad \cup$$

$$ت (١) = ٦١ \times ١٨٣ - ٩٤ \times ١٨٨ - ٤٠ \times ١٨٨ - ١ = ٤٥ \quad \cup$$

$$\frac{١}{٣٠} ت (١) = ٦١ \times ٨٩ - ٩٤ \times ٨٩ - ٤٠ \times ٨٩ - ١ = ٨٩ \quad \cup$$

$$\frac{١}{٣٠} ت (١) = ٦١$$

ومن هنا نؤخذ المعادلة المحولة الثالثة

$$٥٤ ز + ٤٥ ز - ٨٩ ز - ٦١ = ٠$$

التي يعلم منها ان مقدار  $ز$  محصورين  $١٥٠$  ، وتبطل العمل على قدر  
الكفاية يشاهد ان الجذر المطلوب مبين بالكر المتسلل

$$٥٤ ز + ٤٥ ز - ٨٩ ز - ٦١ = ٠$$

$$٥٤ ز + ٤٥ ز - ٨٩ ز - ٦١ = ٠$$

$$٥٤ ز + ٤٥ ز - ٨٩ ز - ٦١ = ٠$$

$$٥٤ ز + ٤٥ ز - ٨٩ ز - ٦١ = ٠$$

$$٥٤ ز + ٤٥ ز - ٨٩ ز - ٦١ = ٠$$

$$٥٤ ز + ٤٥ ز - ٨٩ ز - ٦١ = ٠$$

$$٥٤ ز + ٤٥ ز - ٨٩ ز - ٦١ = ٠$$

الاي

(٥١٤)

وبأخذ الآلة السابعة يستخرج من هذا الكرم مقدار مقرب من الجذر  
بأربعة أرقام اعشارية هو المقدار ٣٠٣٨٩٠

ومن هنا يؤخذ أن مقدارى الجذرين الموجبين من المعادلة المفروضة  
المقربين بأقل التقريب من  $\frac{1}{2}$  يكونان مبينين بالمقدارين  
١٢٥٦٩ و ١٦٩٢٠

وإذا اردت حساب الجذر السالب بوضع - س بدل س في  
المعادلة المفروضة فتؤول الى

$$س - ٧ - ٧ = ٠$$

ومنها يجد

$$س = ٧ + \frac{١}{٧ + ٢}$$

ويمكن الاستغناء عن حساب هذا الجذر الثالث لأن مجموع  
الجذرين لما كان معدوماً كان المقدار مطبق للجذر السالب مساوياً

لمجموع الجذرين الموجبين

ويمكن أيضاً حساب الجذرين الموجبين بدون أن يعطى على المعادلة  
أو في قول لأن أحدها محصور بين  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{3}{2}$  والآخرين

(٥١٢)

التي يلزم ان يكون لها جذران أحدهما محصور بين ٢٥٤ والاخر بين ٤٥٣

فاذا اجريت على هذه المعادلة عملية كعملية المثال السابق شوهد  
أن جذرها الأول بين بالكسر المتلسل

$$\frac{\frac{\frac{\frac{1}{1} + 1}{1} + 1}{1} + 1}{1} + 1$$

وبأخذ الآلة الخامسة يستخرج من هذا الكسر مقدار مقرب  
من الجذر بأربعة أرقام اعشارية هو المقدار ٤٠٧١٣٨  
ويكون جذرها الثاني المحصور بين ٤٥٣ وبيناً بالكسر  
المتلسل

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{1}{1} + 1}{1} + 1}{1} + 1}{1} + 1}{1} + 1$$



(٥١٤)

٣-٥ ، فاذا فرض أن  $ص = ١ + \frac{١}{ص}$  كان للجذور  $ص$  مقداراً  
موجباً واحداً أكبر من ١ ، والآخر محصور بين ١ و ٢ ، ومنه  
تكون المعادلة الحادثة من وضع  $١ + \frac{١}{ص}$  بدل  $ص$  مبنية  
بالصورة  $ص = ٢ + ص + ٣ + ٤ = ١٠$  ، فان فرض أن  $ص = ١$   
كان الناتج موجباً وان فرض أن  $ص = ٢$  كان الناتج سالباً  
وان فرض أن  $ص = ٣$  كان الناتج موجباً وبناءً على ذلك يكون  
الجزء الصحيح من أكبر مقدار يفرض للتغير  $ص$  هو ٢ ، واذا  
جعل  $ص = ٢ + \frac{١}{ص}$   $ص = ١ + \frac{١}{ص}$  فحصل من ذلك معادلتين  
محولتان يكون لكل واحدة منها جذراً أكبر من الواحد

### الباب الحادي عشر

في طريقة الحذف المتعلقة بكل معادلتين بدرجتين

من المعادلات ذات المجهولين في المعادلة

التفاضلية وفي صورة المعادلات

ذات المجهولين

٥١٤ في المعادلة ذات مجهولين بدرجة  $م$  ان كانت مرتبة بحسب  
واحد



م ذات مجهولين ينقص بواحد من عدد مكورات المعادلة  
تأخرت يكون هذا العدد مبيثاً بالصورة

$$x + y + \dots + (1 + m) \text{ أو } \frac{1}{m} (x + m)$$

من أن أحد المكورات المجهولة م، وللوأخر التحصيل مقدارين باقي  
ن أن يكون المعادلة المطلوبة محتوية على جزء مسبق بمكرر  
للغرض المتقدم فإن تم هذا الحصول على ذلك ترتب على هذا  
جعل مقدارين باقي مكورات غير محدودة ولذا لم نرأى تجنب  
من قبل المثل

ملحوظات أولية تتعلق بحل معادلتين من المعادلات  
ذات المجهولين

أ إذا اردت حل معادلتين من المعادلات المحتوية على المجهولين  
ص وكان س داخل في واحدة منهما بدرجة أولى  
بامثلة استخراج مقدار س من هذه المعادلة بالنسبة  
ن ثم بوضع هذا المقدار في المعادلة الاخرى فتمت من  
معادلة تكون محتوية الاعلى ص وجب إذا علمت  
بر ص ووضع على التوالي في مقدار س المستخرج

التي بدرجة ثانية

$$حش + (ع + هـ ص) س + هـ + هـ ص + هـ ش = ٠$$

سيند وحيث أن المعادلة لا تتغير بقسمة جميع حدودها على عدد واحد يفرض أن مكرر واحد من حدود المعادلة (ع) ككرر الحد الأول مثل (د) أو الواحد لكن إذا جعل  $ح = ١$  تغيرت الصورة العمومية للمعادلة لأنها لا تكون حينئذ مشتملة على المعادلات ذات الدرجة م التي تكون محتوية على القوة البينية للجو  $س$  سيند فإذا لم يبين مكورات معادلة عمومية ذات مجهولين على وجه بحيث تشمل من ذلك معادلة خصوصية تكون مخففة للشروط المطلوبة فإنه يمكن أن يفرض أن مكرر واحد حدود المعادلة التي يراد تحصيلها يكون مساوياً للواحد فإن لم يسلم هذا الفرض كان واحد من المكورات المجهولة اختياريًا وعندما نتحصل مفاد برساير المكورات التي تعين بواسطة هذا المكرر الاختياري ونوضع في المعادلة العمومية يصير هذا المكرر الاختياري مفروضًا مشتركًا في جميع الحدود فيجذف

ومن هنا يؤخذ أن عدد الشروط اللازمة لتعيين معادلة تمامة

فإذا ضربت هاتان المعادلتان في بعضهما طرفاً بطرف تحملت من ذلك معادلة مجردة عن العلامات الجذرية هي

$$(ج + ك)(ج - ك) = (ج - ك)(ج - ك) \quad \text{أي } ج - ك = ٠$$

ويمكن لتحصين جميع مقادير ص التي تتحققها المعادلتان الأولى أن نحل هذه المعادلة الأخيرة وهذه المعادلة يمكن استنباطها من المعادلتين (١) و (٢) لأنه إذا حول كل من هذه المعادلات الجزء غير المنطق إلى الطرف الثاني من كل معادلة ورفع كل منها إلى القوة

الثانية حدث

$$ج = ك \quad \text{و من هنا يحدث } ج - ك = ٠$$

ومتى علت مقادير ص تحملت مقادير ص بواسطة هذه

القاعدة وهي

سند إذا تحللت الاطراف الأولى من المعادلتين المفروضتين

مضارب منطقة بالنسبة للجهين آت جملة هذين المعادلتين

إلى حل عدة حل أخرى أبسط منها وليان ذلك يرمز إلى المفروضة

بالمعادلتين  $م = ٠$  و  $ن = ٠$  وبفرض أن  $م = ج - ك$

و  $ن = ج - ك$  (بجعل  $ج = ٠$  و  $ك = ٠$  و  $ج - ك = ٠$  و  $ك - ج = ٠$  و  $ج + ك = ٠$  و  $ك + ج = ٠$ )

(١٥)

بالنسبة الى  $\mathcal{C}$  تحصل مقادير المتغير  $\mathcal{C}$  المطابقة لهذه المقادير  
ويمكن ايضا استعمال هذه الطريقة في الحالة التي تكون فيها المعادلتين

محتوية على المتغير  $\mathcal{C}$  بدرجة ثانية وهذه المعادلة يتحصل منها

$$\text{لهذا المتغير مقداران هما } \mathcal{C} + \mathcal{K} \text{ و } \mathcal{C} - \mathcal{K} \text{ (بجعل } \mathcal{C} = 0 \text{)}$$

رمزين  $\mathcal{K}$  ولاتين المنطقتين للمتغير  $\mathcal{C}$  فاذا وضع كل واحد

من هذين المقدارين بالتوالي في المعادلة <sup>الثانية</sup> بدل المتغير  $\mathcal{C}$  تحصل

من ذلك معادلتان كلتاها محتوية على  $\mathcal{C}$  وجنباؤهما تؤخذ

من حل هاتين المعادلتين جميع مقادير  $\mathcal{C}$  المحققة للمعادلتين

المذكورتين وبنا على ذلك نوضع المعادلة الحادثة من وضع  $\mathcal{C} + \mathcal{K}$

بدل المتغير  $\mathcal{C}$  في المعادلة الثانية من المعادلتين المعروضتين

بالصورة

$$(1) \dots \mathcal{C} + \mathcal{K} = \mathcal{K}.$$

(بجعل  $\mathcal{C} = \mathcal{K}$  كتابة عن داليتين منطقتين للمتغير  $\mathcal{C}$ )

وجب ان المعادلة الحادثة من وضع  $\mathcal{C} - \mathcal{K}$  بدل المتغير

لا تختلف عن المعادلة السابقة الا بعلامة الجبر. غير المنطق فيحل

$$(2) \dots \mathcal{C} - \mathcal{K} = \mathcal{K}.$$

فاذا

وحيث نتحصل من هاتين المعادلتين بواسطة حل هذه المعادلتين:

$$\begin{array}{l} \text{من معادلتين} \\ \text{من معادلتين} \\ \text{من معادلتين} \end{array} \begin{array}{l} \text{من معادلتين} \\ \text{من معادلتين} \\ \text{من معادلتين} \end{array} \begin{array}{l} \text{من معادلتين} \\ \text{من معادلتين} \\ \text{من معادلتين} \end{array} \begin{array}{l} \text{من معادلتين} \\ \text{من معادلتين} \\ \text{من معادلتين} \end{array}$$

بطريق التوالى

سند اذ كانت الاطراف الأولى من المعادلتين المعروفتين متشابهة  
على مضروب مشترك تحققت المعادلتان بكل اثنين من  
المتغيرات التي يترتب عليها جعل هذا المضروب المشترك مساوياً للصفر  
وحيث نتحصل من ذلك عدد غير محدود من الحلول فانه اذا كانت  
المضروب المشترك لا يحتوي الا على س فيجعل مساوياً للصفر فتحدث  
منه معادلة يتعين فيها عدد محدود من المقادير من الممكن  
ان تنضم اليها أي مقادير مفروضة لتغير من واذا كانت المضروب  
المشترك لا يحتوي الا على س فانه ينتج منه مقادير معينة  
للتغير من يمكن ان تنضم اليها أي مقادير مفروضة لتغير من  
واذا كان المضروب المشترك مشتركاً على المتغيرين من  
فيجعله مساوياً للصفر تحدث منه معادلة يمكن ان تخوض فيها  
لاحد المتغيرين مقادير اختيارية بها تعين مقادير المتغير الآخر

للمضارب النقطية بالنسبة للجبرين  $s$  و  $v$  نتحصل بالـ  
 الجملة  $m = 0$  و  $n = 0$  . بالبحث عن حلول الجمل المتنوعة الآتية  
 وهي

$$\begin{array}{cccccc} s = 0 & || & s = 0 & || & s = 0 & || & s = 0 & || & s = 0 & || & s = 0 \\ v = 0 & || & v = 0 & || & v = 0 & || & v = 0 & || & v = 0 & || & v = 0 \end{array}$$

فاذا فرضت مثلاً المعادلتان

$$s - 1 = v + s - 1 = 0 \text{ و } s + 1 = s + v + 1 = 0 \text{ و } s - 1 = 0 \text{ و } s + 1 = 0$$

فانه يشاهد بالسهولة ان الطرفين الأولين المعادلة الاولى يؤا الى  
 (س - ص) - ١ أى (س - ص + ١) (س - ص - ١)

واذا اريد الوصوف على هذه الحقيقة وهي هل يمكن تحليل المعادلة  
 الثانية الى مضارب منطقة تحل هذه المعادلة بالنسبة الى  
 س فيجد

$$s = -v + 5 \pm 4$$

ومن هنا ينتج

$$s + 1 = s + v + 1 = 0 \text{ و } s - 1 = s - v - 1 = 0 \text{ و } s + 1 = 0 \text{ و } s - 1 = 0$$

(٥٣)

مفروضة للتغيرين

وتتصل باقي الحلول بواسطة الجمل الثلاث الآتية وهي

$$(1) \quad \text{ص} = 1 + 0 \cdot \text{ش} - \text{ش} - \text{ش} - 6 \cdot \text{ص} - 9 = 0$$

$$(2) \quad \text{ص} = 2 - 0 \cdot \text{ش} + \text{ش} + 4 \cdot \text{ص} + \text{ش} - 1 = 0$$

$$(3) \quad \text{ش} + 4 \cdot \text{ص} + \text{ش} - 1 = 0 \quad \text{ش} - \text{ش} - 6 \cdot \text{ص} - 9 = 0$$

فأما الجملة الأولى فيحصل منها للتغيرين ص و ش أربعة مقادير

$$\text{ص} = 1 - 0 \cdot \text{ش} = 1 \quad \text{و} \quad \text{ص} = 2 - 0 \cdot \text{ش} = 2$$

وأما الجملة الثانية فيبحث منها لها أربعة مقادير هي

$$\text{ص} = 0 \cdot \text{ش} = 0 \quad \text{و} \quad \text{ص} = 1 - 0 \cdot \text{ش} = 1 \quad \text{و} \quad \text{ص} = 2 - 0 \cdot \text{ش} = 2$$

وأما الثالثة فيمكن حلها بعلاقات حاسبة مشابهة للعلاقات التي

أجريت في المثال السابق بحيث يحصل منها للتغيرين ص و ش

أربعة مقادير هي

$$\text{ص} = 1 - 0 \cdot \text{ش} = 1 \quad \text{و} \quad \text{ص} = 2 - 0 \cdot \text{ش} = 2 \quad \text{و} \quad \text{ص} = 3 - 0 \cdot \text{ش} = 3$$

سببها فإذا فرضت الآن المعادلتان

$$\text{ش} - \text{ش} - 6 \cdot \text{ص} + 3 \cdot \text{ص} = 0$$

$$2 \cdot \text{ش} - 4 \cdot \text{ص} = 0$$

يُبنى ولنمثل للمعادلتين اللتين يوجد بينهما مضروب مشترك —  
لا يحتوي الا على واحد من المجهولين بمثال — هو

$$(ص - ١) ش + (ص - ٤) ص + ص - ٤ = ١ + ص + ٠ = ٠$$

$$(ص - ٣ ص + ٤) ش - ص - ٣ ص + ٧ ص + ١٥ ص - ١٨ = ٠$$

فاذا اجرينا عملية الحسابان اللازمة لايجاد القاسم المشترك  
الأعظم بين المكررات المستوعمة لقوى  $ص$  وبين الاجزاء التي لا تشتمل  
على هذا المتغير في المعادلة الاولى شوهد ان هذه الكميات تكون  
قابلة للقسمة على  $ص - ١$  أو  $(ص - ١)(ص + ١)$  وأن خارج قسمة

الطرف الاول من المعادلة على  $ص - ١$  باوى  $ش + ص + ٤$  و  $ص - ١$

وان الطرف الاول من المعادلة الثانية يكون قابلاً للقسمة على

الكمية ذات الحدود الثلاثة  $ص - ٣ ص + ٤$  المكافئة للكمية

$$(ص - ١)(ص - ٤) \text{ وان خارج القسمة باوى } ش - ص - ٦ ص + ٩$$

وجيئة يمكن وضع المعادلتين المفروضتين هكذا

$$(ص - ١)(ص + ١)(ش + ص + ٤) ص + ص - ١ = ٠ = ٠$$

$$(ص - ١)(ص - ٤)(ش - ص - ٦ ص + ٩) = ٠$$

وهانما المعادلتان تتحققان بوضع  $ص = ١$  مع اى مقادير



لا يشترط أن يكون المتغير  $S$  وهاهنا المعادلتان تكونان محقتين  
 بالمقدار  $S$  ولذا يكون للطرفين الأولين من المعادلتين  
 قاسم مشترك مشترك على المضروب  $S$  - لـ وحينئذ يقال -  
 إذا علمت معادلتان بمجهولين لزم لكي يكون أي مقدار اختياري  
 مفروض واحد من المجهولين كالجهول  $S$  مثلاً محققاً لهاتين  
 المعادلتين أنه إذا وضع هذا المقدار في المعادلتين كان للطرفين  
 الأولين قاسم مشترك هو دلالة للجوهل الآخر  $S$  وبالعكس  
 إذا كان للطرفين الأولين من المعادلتين بعد استبدال مقدار  
 $S$  قاسم مشترك هو دلالة  $S$  كان هذا المقدار المفروض  
 للمتغير  $S$  يكون محققاً للمعادلتين فأنجعل هذا القاسم المشترك  
 مساوياً للصفر تحققت من ذلك معادلة جذورها هي المقادير  
 المطابقة للجوهل الآخر  $S$   
 ٨. ويند وبنا على ذلك يلزم لتخيل الحلول المشتركة بين المعادلة  
 المفروضتين أن تجري على طرفيها الأولين بمقتضى القاعدة السابقة  
 العلويات التي يراد إجراؤها عليها إذا اراد إيجاد قاسمها  
 الأعظم

(٥٥)

شاهد مباشرة انه يمكن وضع المعادلة الاولى بالصورة  
 $(س - ص) (ش + س + ص - ص) =$  . والثانية بالصورة  
 $ش - س - ص + ش - ص =$  . أو  $(س - ص) (ش + س + ص) =$  .  
 ومن هنا يؤخذ ان  $س - ص =$  . فيكون للمعادلتين عدد غير محدود  
 من الحلول

ويلزم لتحويل باقى الحلول ان تحل المعادلتان

$$ش + س + ص - ص = ٣ ص = ٣ ص + ص = ٤ ص$$

فيحصل من ذلك للتغيرين  $س$  و  $ص$  مقداران هما  $س =$  .

$ص =$  . (وهذان المقداران هما من حلول المعادلة  $س - ص = ٠$ )

$$\text{ومقداران اخران هما } س = \frac{٩}{٧} \text{ و } ص = \frac{٤٧}{٧}$$

في الطريقة العمومية المتعلقة بكل معادلتين

مقيمتين بمجهولين

سند اذا فرضت معادلتان بدرجة ما ومجهولين كالمجهولين

$س$  و  $ص$  وكان  $س = ل$  و  $ص = ع$  حلا مشتركا

بين هاتين المعادلتين وعوضا عن وضع  $ل$  بدل  $س$  و  $ع$

بدل  $ص$  وضع  $ع$  بدل  $ص$  فقط تحصلت من ذلك معادلتان

مشتقتان

مشتقتان



فإذا فرضنا  $\frac{a}{b}$  الى هاتين المعادلتين بالصورتين  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  و  $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$

وفرضنا درجة  $\frac{a}{b}$  بالنسبة الى  $\frac{c}{d}$  لاثنين  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{e}{f}$

وأمكن اجراء عملية قسمة  $\frac{a}{b}$  على  $\frac{c}{d}$  وكان خارج القسمة خالياً

عن المقامات المحتوية على  $\frac{c}{d}$  بحيث لا يقتضى اجراء عملية تبسيطها

بتحقيق هذا الشرط وجعل في  $\frac{a}{b}$  الخارج  $\frac{c}{d}$  في  $\frac{a}{b}$  الباقي

حدث  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$

ومن هذه المساوية يؤخذ ان جميع مقادير المجهولين المستخرجة من

المعادلتين  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  و  $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$  تكون محققة للمعادلة  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ .

لان الخارج في لا يكون غير محدود في فرض المقادير المحدودة

للمجهولين  $\frac{c}{d}$  و  $\frac{e}{f}$  وبمثل ذلك يبرهن على ان جميع المقادير المحققة

للمعادلتين  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  و  $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$  تكون محققة ايضا للمعادلة  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ .

وبما ان يمكن استقواء المعادلتين  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  و  $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$  بالمعادلتين

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  و  $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$  السيطتين من هاتين المعادلتين السيطتين

درجة طرف احدها وهو  $\frac{c}{d}$  اقل من درجة طرف الاخرى وهو

$\frac{e}{f}$  بالنسبة الى  $\frac{c}{d}$

ولا يتأق مثل ذلك اذا كان الخارج في محتوي على مقامان مشتركة

على  $\frac{c}{d}$



محققة للمعادلة  $٠ = ٠$ .

وأما المعادلتان  $٠ = ٠$  و  $٠ = ٠$  فتبقى عليهما عملية مشابهة  
 للعملية التي أُجريت على المعادلتين  $٠ = ٠$  و  $٠ = ٠$  وبهذه  
 المثابة تتحصل معادلتان أحدهما  $٠ = ٠$  والأخرى دونها  
 في الدرجة بالنسبة إلى  $٠$  وهاتان المعادلتان تحققان جميع  
 حلول المعادلتين  $٠ = ٠$  و  $٠ = ٠$  وبحلول أخرى غير هذه  
 ويتوالى العمل هكذا يتوصل دائماً إلى معادلتين أحدهما غير محتوية  
 على  $٠$  فإذا بقيت جميع حلول هاتين المعادلتين تحسب من  
 ذلك جميع حلول المعادلتين المفروضتين وكذلك حلول المعادلات الثلاثة  
 من إجراء عملية التصليح على المقاسيم المتوالية  
 هيندي فإن وجدت في الطرفين الأولين من المعادلتين المفروضتين  
 مضارب لا تشمل الأعلى من اختصر العملية بمحذف هذه المضارب  
 لكنه ينبغي ملاحظة الحلول التي يمكن تحصيلها من هذه المضارب  
 كانتقدم (في بندي ٣٠٣ و ٣٠٤) ثم تحذف أيضاً من البواقي  
 المتوالية المضارب التي لا تشمل الأعلى من وتلاحظ الحلول  
 المتحصلة منها

(١٧٨)

بمثل زيتها نظيرت بمثل من موزونين تقرب المعادلة (٢)  
وفي المعادلة الثانية يستويض بمثل بالظرف الثاني  
معادلة الثانية من المعادلات (١) فيحدث

$$\frac{م}{م} = \frac{م}{م} + \frac{ك}{م} + \frac{ر}{م} \quad (١)$$

في المعادلة الثانية عدد صحيح لان م و ك يقبلان  
على م وهذه النكية تقبل القسمة ايضا على م لان  
م كل من م و م وهو أولى مع ر وعلى  
اذا قسم كل طرف في المعادلة المذكورة على م وجعل  
به الاختصار

$$\frac{ك}{م} = \frac{م}{م} + \frac{ك}{م} + \frac{ر}{م} = ج \quad (٢)$$

لانتباطين بموزونين تقرب في مبداء الامر  
في الثانية من المعادلات (١) في م فيحصل  
 $\frac{ك}{م} = \frac{م}{م} + \frac{ك}{م} + \frac{ر}{م}$  وجثان  $\frac{م}{م} = م$   
بالقسمة على م فيلزم ان م يقسم ايضا  $\frac{ك}{م}$   
ان م أولى مع ر وقد فرض على وجه الاختصار ان

ثم نبرهن في انه يمكن تحويل جميع المعادلتين  $ج = د$  و  $د = هـ$  الى  
 هذه المعادلة واحدة

$$(٤) \quad ج = د = هـ$$

ثم نبرهن في سبيل آخر على ان المعادلتين  $ج = د$  و  $د = هـ$  تكونان حقيقة معاً  
 $ج = د$  و  $د = هـ$  . وبين بعد ذلك ان المعادلتين  $ج = د$  و  $د = هـ$   
 متبعتان لحل المعادلات (٤) فاذا قسم المعادلتين الاولى الى المعادلة الآتية  
 من المعادلات (١) على  $م$  اتت هذه المعادلة الى

$$(٣) \quad \dots \dots ج = د = هـ + \frac{ج}{م} + \frac{د}{م} + \frac{هـ}{م}$$

وحيث ان  $\frac{ج}{م}$  عدد صحيح لان  $ج$  قابل للقسمة على  $م$   
 فيكون  $ك$  قابل للقسمة على  $م$  وحيث ان  $د$  بالقسمة  
 اولى مع  $م$  فيكون  $م$  قاسماً للخارج  $ك$

وبؤخذ من المعادلة (٣) ان مقادير  $ج$  و  $د$  و  $هـ$  الحقيقة للمعادلة  
 $ج = د = هـ$  . يترب عليها انعدام  $\frac{ج}{م}$  وحيث ان  
 $\frac{ج}{م}$  و  $\frac{د}{م}$  و  $\frac{هـ}{م}$  أوليان معاً تكون هذه المقادير بحقيقة للمعادلة  
 $ج = د = هـ$  . وبنا على ذلك تكون جميع حلول المعادلتين  $ج = د$  و  $د = هـ$

حقيقة للمعادلتين  $ج = د$  و  $د = هـ$  .

وتفصيل



(٥٢٣)

$$(٦) \dots \frac{٥٥٥}{١٢١٢} = ٥ + ٥ + ٥ = ١٥$$

فأضربت المعادلة (٥) في ٥ واستعوضت ٥٥٥ بالطرف الثاني من المعادلة الثالثة من المعادلات (١) فأنها تحولت الى

$$\frac{٥٥٥}{١٢١٢} = ٥ + ٥ + ٥ = ١٥$$

وبمثل ما تقدم يبرهن على أن المكرر ٥ يكون قابلاً للقسمة على ٥ وجنيداً إذا جعل ٥ رمزاً خارج القسمة حد -

$$(٧) \dots \frac{٥٥٥}{١٢١٢} = ٥ + ٥ + ٥ = ١٥$$

ويؤخذ من المعادلتين (٦) و (٧) أن جميع المقادير المفروضة

للمتغيرين ٥ و ٥ التي تعول بها الكميتان الكثر والحدود

٥ و ٥ الى الصفر يتربط بها أيضاً انعدام الطرفين الاولين

من هاتين المعادلتين وحيث أن  $\frac{٥٥٥}{١٢١٢} = ٥ + ٥ + ٥ = ١٥$  اوليات

معاً تكون جميع حلول المعادلتين  $٥ = ٥ = ٥$  محققة

للمعادلتين  $٥ = ٥ = ٥$  المفروضتين

فأما المعادلة التي يحدث منها ارتباط بين ٥ و ٥  $\frac{٥٥٥}{١٢١٢}$

فأنها تتحصل من ضرب المعادلة (٦) في ٥ واستعوضت ٥٥٥

بالطرف الثاني من المعادلة الرابعة من المعادلات (١) وبهذه

(٥٤٤)

$$\frac{م}{م} = م = \frac{م}{م} = م \text{ فيكون } \frac{م}{م} =$$

$$(٥) \dots \frac{م}{م} = م = م + م + م + \dots$$

ويؤخذ من المعادلتين (٤) و (٥) ان المقادير المقروضة للتغيرين

س و ص اللذين تؤول بهما الكيمان الكبيرتا الحدود ر و م

$$\text{الى الصفر يترتب عليها ايضا انعدام } م = م - م = م - م = م$$

$$\text{وحيث ان } \frac{م}{م} = م \text{ اوليان معاً فيكون جميع حلول}$$

$$\text{المعادلتين } ر = م \text{ و } م = م \text{ محققة للمعادلتين}$$

$$م = م \text{ و } م = م \text{ المقروضتين}$$

$$\text{ولتحصيل ارتباط بين } م \text{ و } م \text{ ن } م = م \text{ تضرب المعادلة}$$

$$(٤) \text{ في } م \text{ ويستعوض } م \text{ بالطرف الثاني من المعادلة الثالثة}$$

من المعادلات (١) فيحدث

$$\frac{م}{م} = م = م (م + م + م + \dots) + م + م + \dots$$

وحيث ان م يقسم بالفرض الطرف الاول من هذه المعادلة

$$\text{كانه يقسم ايضاً } م \text{ فيكون قاسماً للقيمة } م (م + م + م + \dots) + م + م + \dots$$

$$\text{وحيث ان } م \text{ و } م \text{ اوليان معاً فيكون } م \text{ قاسماً للمضروب}$$

$$\text{فيه } م \text{ وجنّب اذا جعل } م \text{ رمزاً للخارج القسمة حدث}$$

(٥٢٥)

اوليا انهما فكون جميع حلول المعادلتين  $x = \frac{p}{q}$  و  $y = \frac{r}{s}$ .

محققة للمعادلتين  $ax + by = c$  و  $dx + ey = f$ .

وحيث انهما يبقون لدينا الا ان نبرهن على ان اى مقادير محققة للمعادلتين

هي  $x = \frac{p}{q}$  و  $y = \frac{r}{s}$ . تكون نتيجة المقادير المحققة للمعادلات (٥) فنقول

انه ينزعم لتكوين المعادلات التي يؤخذ منها هذا الاثبات ان نضع

في المعادلة (٢) بدل  $\frac{p}{q}$  و  $\frac{r}{s}$  بدل  $\frac{p}{q}$  فيجدث بعد تحويل  $x$  و  $y$  من طرفه الى الطرف الآخر

$$(١) \dots \dots \dots (١) \quad r - \frac{p}{q} = \frac{r}{s}$$

فاذا اريد الآن حذف  $r$  من المعادلتين (١) و (٥) فانه يتوصل

الى ذلك بواسطة طرح احدى هاتين المعادلتين من الاخرى بعد

ان تضرب المعادلة الاولى في  $q$  والثانية في  $s$  وذلك بملاحظة

مقادير  $q$  و  $s$  وقد تكون العلية مختصرا اذا ضربت المعادلة

(١) في  $q$  والمعادلة (٥) في  $s$  لانه يتحصل حينئذ عند طرح

احدى المعادلتين الناتجتين من الاخرى

$$(qs - pr) = (qs - pr) \quad \text{و بوضع} \quad \frac{p}{q} = \frac{r}{s}$$

بدل  $x = \frac{p}{q}$  و  $y = \frac{r}{s}$  وحذف المضروب و يجدث

(٥٤)

المثابة يكون  $\frac{١١١١}{١٢١٢} = ١ - ٢ (٤ + ٢ + ١) + \frac{١٤}{١٢}$   
 مع ١، فاذا قسم طرفا هذه المعادلة على ١٢ وجعل مع رمزًا  
 لخارج قسمة الكمية الكبيرة الحدود الثامنة مع ٢ + ١ مع  $\frac{١٤}{١٢}$   
 على ١٢ حدث

$$(١) \dots \frac{١١١١}{١٢١٢} = ١ - ٢ (٤ + ٢ + ١) + \frac{١٤}{١٢}$$

ولتحصيل ارتباط بين ١ و ٢ و ٣ نضرب المعادلة (٧) في ١٢  
 ويستعوض ١٢ بـ ١ بالطرف الثاني من المعادلة الرابعة من

المعادلات (١) فيحدث من ذلك

$$\frac{١١١١}{١٢١٢} = ١ - ٢ (٤ + ٢ + ١) + \frac{١٤}{١٢} + ١٢$$

وبقسمة طرفي هذه المعادلة على ١٢ وجعل ١٢ رمزًا لخارج قسمة الكمية الكبيرة

الحدود الثامنة مع ٢ + ١ على ١٢ يحدث

$$(٩) \dots \frac{١١١١}{١٢١٢} = ١ - ٢ (٤ + ٢ + ١) + \frac{١٤}{١٢} + ١٢$$

ويؤخذ من المعادلتين (١) و (٩) ان جميع المقادير المقروضة

للمغنيين س و ص التي تؤول بها اليكمان الكبيرة الحدود

و ١ الى الصغرى ترتب عليها ايضا انعدام الطرفين

لأولين من هاتين المعادلتين وحيث ان  $\frac{١١١١}{١٢١٢} = ١ - ٢ (٤ + ٢ + ١) + \frac{١٤}{١٢}$

المضبوطة للمعادلتين  $ج = و = د = ٠$  يقال —

إذا كان المقدار  $ص = ٤$  جذراً للمعادلة  $٧ = ٧$  . كذا المقدار

$س = ل = و = ص = ٤$  محققين للمعادلتين  $د = و = ٧ = ٧$  .

وإن كان المقدار  $ص = ٤$  لا يحقق المعادلة  $٧ = ٧$  . وكان

جذراً للمعادلة  $٧ = ٧$  . نعلم من المعادلة (١٠) أن المعادلة

$د = ٧$  . نتحقق بالمقادير  $س = و = ص = ٤$  وبأن على ذلك

يكون هذان المقداران محققين للمعادلتين  $د = و = ٧ = ٧$  .

وإن كان المقدار  $ص = ٤$  لا يحقق واحدة من المعادلتين  $٧ = ٧$  .

$و = ٧ = ٧$  . وكان جذراً للمعادلة  $٧ = ٧$  . نعلم من المعادلة

(١١) أن المعادلة  $د = ٧$  . نتحقق بالمقادير  $س = ل = و = ص = ٤$

وبأن على ذلك يكون هذان المقداران محققين للمعادلتين  $د = و = ٧ = ٧$

وإن كان المقدار  $ص = ٤$  لا يحقق واحدة من المعادلات الثلاث

$٧ = ٧$  .  $و = ٧ = ٧$  .  $د = و = ٧ = ٧$  . وكان جذراً للمعادلة  $٧ = ٧$  .

نعلم من المعادلة (١٢) أن المعادلة  $د = ٧$  . نتحقق بالمقدار  $س$

$س = ل = و = ص = ٤$  وبأن على ذلك يكون هذان المقداران محققين

للمعادلتين  $د = و = ٧ = ٧$  .

(٥٤٦)

$$(11) \dots\dots\dots ج - ح = د - \frac{ص}{م} \frac{هـ}{م}$$

واذا ارد حذف د من المعادلتين (٦) و (٧) تضرب المعادلة (٦) في د والمعادلة (٧) في ح ثم تطرح احدى المعادلتين التابعتين من الاخرى فيحدث

$$(ج - د - ح) د + (ج - د - ح) د = \frac{ص}{م} د - \frac{هـ}{م} د \text{ وبوضع } د = \frac{ص}{م} \frac{هـ}{م}$$

بدل ج - د - ح وحذف المضروب د يحدث

$$(12) \dots\dots\dots ج - ح = د - \frac{ص}{م} \frac{هـ}{م}$$

وبهذه المثابة تحصل المعادلة

$$(13) \dots\dots\dots ج - ح = د - \frac{ص}{م} \frac{هـ}{م}$$

ويؤخذ من المعادلة (١٣) هذه أنَّ أيَّ مقادير مفروضة للمتغيرين

س و ص ومحقة للمعادلتين ج = د و د = هـ. تكون

محقة ايضاً للمعادلة  $\frac{ص}{م} \frac{هـ}{م} = \dots$  وهذا يقتضي

أن أحد المضارب  $\frac{ص}{م}$  و  $\frac{هـ}{م}$  لا يمكن أن يكون معدوماً

ومن هنا يعلم أن مقادير المتغير ص تؤخذ من المعادلات

$$\frac{ص}{م} = 0 \text{ و } \frac{هـ}{م} = 0 \text{ و } \frac{ص}{م} = 0 \text{ و } \frac{هـ}{م} = 0$$

إذا تقرر هذا وفرض أن س = ل و ص = هـ كتابة عن المقادير

المضبوطة

(٥٣٩)

وحيث انه لم يحصل تصليح في المقاسيم ولم يحذف من البواقي مفروضاً  
افتتح جميع حلول المعادلتين المفروضتين بواسطة المعادلتين  
 $s + c = 0$  و  $s - c = 0$

اللتين تؤخذ منهما المقادير الأربعة

$$s = 0 \text{ و } s = 0 \text{ و } s = 0 \text{ و } s = 0$$

وجنبد تكون المعادلة  $s - c = 0$  هي المعادلة الانتهاية  
بالنسبة الى  $s$

### المثال الثاني

$$s + c = 0 \text{ و } s + c = 0 \text{ و } s + c = 0 \text{ و } s + c = 0$$

وأما القسمة الاولى فانه يؤخذ منها الباقي  $(s - c)$   $s + c = 0$   
أو  $(s - c)$   $(s + c)$  ثم يحذف المضروب  $s - c$  يقسم  
الطرف الاول من المعادلة الثانية على  $s + c$  فيكون  
الباقي وهو  $s - c$  غير محتوي على المتغير  $s$  وجنبد  
تتضمن جميع حلول المعادلات المفروضة بواسطة المعادلات  
(١) .....  $s - c = 0$  و  $s + c = 0$  و  $s - c = 0$  و  $s + c = 0$

(٥٣٨)

وجبت أن تكون جميع المقادير المحققة للمعادلتين  $ج = د$  و  $د = هـ$  . من جملة

المقادير المحققة للمعادلات (٤)

ويطلق على المعادلة  $\frac{١٢١٢١٢}{٣٣٣٣} =$  . التي تتحصل منها جميع مقادير

ص اسم المعادلة الانتهاية بالنسبة الى ص

ولنوضح ذلك بمثالين فنقول

### المثال الأول

$$١٢ + ٢ ص ش + (٢ ص ش - ١) س + ص ش - ص ش + د ص = ٠$$

$$١٢ + د ص ش + ص ش - ص ش = ٠$$

### القسمة الأولى

$$\begin{array}{r|l} ١٢ + ٢ ص ش + (٢ ص ش - ١) س + ص ش - ص ش + د ص & ١٢ + د ص ش + ص ش - ص ش + د ص \\ \hline ١٢ + د ص ش & ١٢ + د ص ش + ص ش - ص ش + د ص \end{array}$$

$$١٢ + د ص ش + (٢ ص ش - ١) س + ص ش - ص ش + د ص$$

$$- ص ش - د ص ش - ص ش + د ص$$

$$\hline ١٢ + د ص$$

### القسمة الثانية

$$\begin{array}{r|l} ١٢ + د ص ش + ص ش - ص ش + د ص & ١٢ + د ص ش + ص ش - ص ش + د ص \\ \hline ١٢ + د ص ش & ١٢ + د ص ش + ص ش - ص ش + د ص \end{array}$$

$$\hline ١٢ + د ص$$

وجبت



(٤١)

نرمز ان يجعل  $s = s - h$  فيكون  
 ووضع  $h + ص$  بدل  $s$  في المعادلة  $(ح)$  = نوون  
 $د (ح + ص) = ٠$

اوانه يتحصل بمقتضى عملية التحليل (كما في (٤٠))

$$(٤٠) \dots د (ح) + د (ح) ص + د (ح) \frac{ص}{ح} + د (ح) \frac{ص^2}{ح^2} + \dots + د (ح) \frac{ص^n}{ح^n} = ٠$$

وحيث ان  $هـ$  بالفرض جذر للمعادلة (١) فتكون  $د (ح)$  معدومة  
 وبناء على ذلك تكون المعادلة (٤٠) قابلة للقسم على  $ص$  ويكون

فاجذر معدوم وهذا الجذر للمعدوم حادث من القاسم  
 $هـ - ح$  لانه بمقتضى الارشاد  $ص = س - ح$  يشاهد ان مقام

$ص$  هي الفرق بين الجذر  $هـ$  و  $س$  أخرج جذور المعادلة (١)

بما فيها من الجذر  $هـ$  وبجذف هذا الجذر للمعدوم تؤول المعادلة الى

$$د (ح) + د (ح) \frac{ص}{ح} + د (ح) \frac{ص^2}{ح^2} + \dots + د (ح) \frac{ص^n}{ح^n} = ٠$$

وحيث تكون جذور هذه المعادلة هي الفرق بين الجذر  $هـ$  والجذر

م-١ للمعادلة المفروضة

فاذا وضع في المعادلة المذكورة  $ز$  بدل  $هـ$  تحققت من ذلك

معادلة تكون جذورها هي جميع الفرق بين الجذر  $ز$  وجذور

(٤) ..... ض - ٥ ص + ٦ = ٠ و ٧ ص + ٨ = ٠

فأما المعادلات (١) فتؤخذ منها المقادير ص = ٤ و س = ٠

ص = ٤ و س = -٤ وأما المعادلات (٤) فتحصل منها المقادير

ص = ٤ و س = -٤ و ٣ = ٧ و س = -٥

وأما المعادلة المنتهية بالنسبة إلى ص فانها تحصل من ضرب

الطرفين المعادلتين ص - ٤ = ٠ و ض - ٥ ص + ٦ = ٠ في بعضها

### في المعادلات التفاضلية

قد تقدم (في ص ٨٩) انه يمكن اجراء عملية استخراج الجذور

في المنطقة لمعادلة رقيقة وذلك بان يجري العمل في مبداء الأمر

على معادلة اخرى تكون جذورها هي الفروق بين جذور المعادلة

المفروضة مأخوذة متتالية وبتتبعي الآن لبيان كيفية تكوين

هذه المعادلة فنرسل الى المعادلة المفروضة بالرمز

(١) ..... و (س) = ٠

ونجعل ١ و ٢ و ٣ و ٤ رموز الجذور البينية

فاذا فرضنا في مبداء الأمر انه اريد تحصيل معادلة تكون جذورها

هي الفروق بين الجذور ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ و ١٠

مجموعها

(٥٤٣)

وبناءً على ذلك يكون كل اثنين من جذور هامتا وبينهما تقاسمات  
في العلامة

فاذا فرض أن  $m = (1-m)$  وكانت المعادلة التقاضلية  
موضوعة بالصورة

$$x^m + x^{m-2} + x^{m-4} + \dots + x^2 = 0$$

يمكن جعل  $x = y$  وجنبا بجدث

$$y^m + y^{m-2} + y^{m-4} + \dots + y^2 = 0$$

وحيث ان جذور هذه المعادلة هي مربعات فروق جذور المعادلة  
المفروضة فيطلق عليها بهذا السبب اسم معادلة مربعات التقاض  
ينبغي ونستعمل المعادلة التقاضلية (كما في هـ) في تحصيل  
قيمة دون اصغر فرق بين جذور معادلة مفروضة ولذا يبعث  
عن النهاية الصغرى للجذور الموجبة للمعادلة التقاضلية وهذه

النهاية هي القيمة المطلوبة

ويمكن ايضا ان يبحث عن النهاية الصغرى لجذور معادلة مربعات  
التفاضل فيكون الجذر الذي يسمى بهذه النهاية هو الجذر  
الصغرى المطلوبة وبهذه المثابة تتحصل ثانياً النهاية الكبرى

(٥٤٤)

٢-١ المعادلة المفروضة وإذا وضع فيها  $h$  بدل  $z$  حدثت  
ذلك معادلة تكون جذورها هي جميع الخروق بين الجذر  $h$

والجذور ٢-١ للمعادلة المفروضة وهم جبراً

ومن هنا يؤخذ أن جذور المعادلة المفروضة الموفقة مثلي هي

مقادير من الحادثة من وضع كل من هذه الجذور بدل  $s$

في المعادلة

$$(x) z (y) + z'' (s) \frac{v}{x_1} + z''' (s) \frac{v}{x_1 x_2} + \dots = 0$$

وهذا راجع إلى حل كلتا المعادلتين (١) و (٢)

وبناءً على ذلك إذا حذف  $s$  من المعادلتين (١) و (٢) كانت

المعادلة النهائية بالنسبة إلى  $v$  هي المعادلة المطلوبة

٣-١ حيث أن المعادلة المفروضة بدرجة  $m$  فتكون للمعادلة

التفاضلية بدرجة  $m$  (١-٢) لأن عدد جذورها يساوي

عدد الترتيب التي يمكن تكوينها من الحروف  $h$  و  $z$  هو المأخوذة

مثلي التي عددها  $m$

والمعادلة التفاضلية لا تحتوي إلا على قوى زوجية للجهز

لأنها تحتوى في آن واحد بكل من الجذرين  $h$  و  $z$  -  $h$

ان كانت سائر مربعات السلسلة متساوية  
 فيكون مجموع مربعاتها متساوية  
 عند زوايا (ويغني ان المعادلة المذكورة لا تكون لها جذور  
 متساوية حتى لا يكون للمعادلة التفاضلية جذور معدومة)  
 وان كانت معادلة مربعات التفاضلات دالة وكانت محتوية  
 على مقادير فقط كانت جذور المعادلة المفروضة كلها حقيقية  
 لانها اذا كان لها جذران تميزان كالجذرين  $\alpha + \beta$  و  $\alpha - \beta$   
 كان مجموع تفاضلي هذين المقدارين  $\alpha + \beta$  وجنبا  
 يؤخذ من ذلك ان معادلة مربعات التفاضلات يكون لها جذور  
 سالبة وحيث ان الدالة فتكون محتوية على مداومة وهذا يخالف  
 للفرض فاذا اجريت الصيغة المتقدمة (المشابهة) على المعادلة  
 العمومية ذات الدرجة الثالثة

$$x^3 + 8x^2 + 8x + 8 = 0$$

شوهد ان معادلة مربعات التفاضلات هي

$$x^3 + 8x^2 + 8x + 8 = 0$$

ومن هنا يؤخذ ان الشرطين الضروريين الكافيين لجعل جذور

ان تحصلت في مذهب من المعادلتين (١) و (٢) عدة معادلات  
 جزئية متقوية على ص وكانت جذور كل واحدة من  
 هذه المعادلات من مقادير ص فانه يحدث من ذلك كمية  
 تكون اقرب من أصغر فرق بين جذور المعادلة المفروضة وذلك ان  
 يبحث عن النهايات الصغرى بين جذور كل معادلة جزئية وحيث  
 لا بد من اقتران كل فرق في كلتا المعادلتين بالعلامتين + و -  
 لانه من ان تكون النهاية الصغرى للمقادير الموجبة المفروضة المتغير  
 من او النهاية الصغرى للمقادير السالبة هي الكمية العددية المتغيرة  
 وان لم تنجز العمليات الضرورية لجعل المعادلات المحتوية على  
 ص غير مشتقة على جذور اخرى فانه يمكن دائماً استعمال هذه  
 المعادلات في تعيين الكمية المطلوبة غير انه يقتضي البحث عن  
 نهاية تكون أصغر من النهاية التي يمكن تحصيلها عند ما ذكرنا  
 المعادلات المحتوية على ص غير مشتقة على جذور اخرى  
 في إيجاد معادلة مربعات التفاضلات بسم منها هذه المعادلة  
 جذور تخيلية أم لا

عنا ليتين المشتملتين على المكررين المجهرين  $ج$  و  $ك$  ويلزم لكي نكون  
 البكبة ذات الحدود الثلاثة  $س + ج + ك$  من قواسم الطرف  
 الاول من المعادلة المفروضة ان يكون الباقي  $ج + س + ك$  معدوماً  
 وحيث أن  $س$  غير معين فكون  $ج = ٠$  و  $ك = ٠$  وجنبد  
 تعلم من المقادير المتصلة لكل من  $ج$  و  $ك$  بواسطة هاتين المعادلتين  
 جميع القواسم ذات الدرجة الثانية للمعادلة المفروضة

وحيث ان عدد القواسم ذات الدرجة الثانية  $\frac{1}{2} م (م - ١)$   
 (كافي سند) فاذا حذف  $ج$  أو  $ك$  من المعادلتين  $ج = ٠$  و  
 $ك = ٠$  كانت المعادلة الانتهاية من المعادلات ذات الدرجة  
 $\frac{1}{2} م (م - ١)$  وحيث ان هذا العدد اكبر من  $م$  فإن زاد  $م$   
 ٣ كان تعيين القواسم ذات الدرجة الثانية اصعب من  
 المعادلة المفروضة

سند ويمكن استعمال البحث عن القواسم ذات الدرجة الثانية في تعبا  
 ٢١٦ المجذور التخيلية لاي معادلة ولذا يكفي ان يعين كل من المقد  
 الحقيقية لكل من  $ج$  و  $ك$  المحققين للمعادلتين  $ج = ٠$   
 $ك = ٠$  فنحصل من ذلك جميع القواسم الحقيقية





(٥١٩)

فيها هـ بدل ج فتكون مقادير  $\lambda$  و  $\mu$  بذور المعادلة المفروضة  
وليزيد ايضاً ذلك تجعل  $\lambda = 0$  و  $\mu = 0$  رموزاً الجذور المعادلة  
(١) فتكون المقواس المطلوبة هي

(س-ل) (س-ع) (س-ل) (س-لا) (س-ع) (س-لا)  
وجنباً تكون مقادير ج هي

$$-(\lambda + \mu) - (\lambda + \mu) - (\lambda + \mu) - (\lambda + \mu)$$

وحيث أن المعادلة المفروضة مجردة عن الحد الثاني فيكون

$$\lambda + \mu = 0$$

ومن هنا ينتج

$$-(\lambda + \mu) = 0 - (\lambda + \mu) = 0 - (\lambda + \mu) = 0 - (\lambda + \mu) = 0$$

بمسند ثم نفرض ايضاً المعادلة

$$(2) \dots \dots \dots \lambda + \mu + \nu = 0$$

التي اذا قسم طرفها الأول على  $\lambda + \mu + \nu$  نحصل الباقي

$$(\lambda + \mu + \nu) - (\lambda + \mu + \nu) = 0$$

وجنباً يلزم وضع المعادلتين

$$(3) \lambda + \mu + \nu = 0 \quad (4) \lambda + \mu = 0$$

ذات الدرجة الثانية للمعادلة المفروضة ويجعل كل من هذه  
المواسم سادياً للصفر تعين الجذور الحقيقية لهذه المعادلة

فان وجد لكل من  $g$  و  $k$  مقداران منطقان محققان للمعادلتين

$$g = 0 \quad \text{و} \quad k = 0 \quad \text{سهل تعيينها ومن هنا تعلم جميع القواسم النطقية}$$

ذات الدرجة الثانية للمعادلة المفروضة وجنّذ يؤول حل هذه

المعادلة الى حل معادلة دونها في الدرجة والى حل جملة معادلات

بدرجة ثانية

سند ونمثل للطريقة المذكورة بأثلة فنفرض في مبداء الامر المعادلة

$$(1) \quad \dots \dots \dots x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x = 0$$

التي اذا قسم طرفها الأول على  $x^2$  نحصل من ذلك

$$\text{الباقى} \quad (x^3 - 4x^2 + 3x + 2) \quad \text{و} \quad x^2 + x + 2$$

وجنّذ يلزم وضع المعادلتين

$$x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + x + 2 = 0$$

اللتين اذا حذف فيهما  $x^2$  حدثت هذه المعادلة

$$(2) \quad \dots \dots \dots x^3 + 3x + 2 = 0$$

وحيث ان هذه المعادلة لا تختلف عن المعادلة (1) الا بكونه قد وضع  
بها

الثاني من هذه المعادلات  $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  وتسمى المعادلة  $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  بالمعادلة

في (١٩٦) حيث  $x, y, z$  أعداد صحيحة موجبة أو سالبة.

ولذا إذا فرضنا أن  $x, y, z$  أعداد صحيحة موجبة أو سالبة

لن يكون  $x, y, z$  أعداد صحيحة موجبة أو سالبة.

- (١٩٦)  $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$   $x, y, z$  أعداد صحيحة موجبة أو سالبة

- (١٩٦)

يلزم حذف الحد الثاني من المعادلة  $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  تأشير

أن نضرب في جميع جذور هذه المعادلة  $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  في  $xyz$  فنحصل على

المعادلة  $yz = xz + xy$   $x, y, z$  أعداد صحيحة موجبة أو سالبة

وحيث أن هذه المعادلة هي  $yz = xz + xy$   $x, y, z$  أعداد صحيحة موجبة أو سالبة

إلى كل من المعادلات  $yz = xz + xy$   $x, y, z$  أعداد صحيحة موجبة أو سالبة

الحادثة من جهة الآخر ومشتق تكون متساوية  $yz = xz + xy$   $x, y, z$  أعداد صحيحة موجبة أو سالبة

وحيث أن  $x, y, z$  الأخرى من المعادلة  $yz = xz + xy$   $x, y, z$  أعداد صحيحة موجبة أو سالبة

المعادلة جذران حقيقيان عددهما موجب والآخر سالب (١٩٦)

وحيث يحصل بالنسبة لكل مقدار حقيقي مغاير عن الجمل  $x, y, z$

مقدار حقيقي للجمل  $x, y, z$  وبأعلى ذلك تحقق هذه النظرية وهي أن

التي يتحصل من أحدها

$$(٦) \dots\dots\dots = \frac{8^3 + 8^2 - 8}{8^2}$$

وبوضع هذا المقدار في المعادلة الأخرى يحدث

$$(٧) \dots\dots\dots 8^3 + 8^2 + 8(8^2 - 8) - 8^2 = 0$$

وهذه المعادلة بدرجة سادسة لكن حيث أنها لا تحتوي إلا على قوى

زوجية للجهد  $x$  فنؤول إلى معادلة بدرجة ثالثة بفرض  $x^2 = z$

ويسهل إدراك القبول لأن مقادير  $x$  السسة يتكون من

مجموع كل اثنين منها أربعة جذور للمعادلة المفروضة وحيث

أن مجموع هذه الجذور معدوم فيكون مجموع كل اثنين منها مساوياً

لمجموع الاثنين الآخرين ومتخالفاً معه في العلامة وحيث

لا تكون المعادلة التي يتعين بها  $x$  مشتملة إلا على قوى زوجية

للجهد

فاذا اجريت مثل هذه العملية على المعادلة التامة

$$x^8 + 8x^7 + 8x^6 + 8x^5 + 8x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 8x + 8 = 0$$

فانه يتحصل من ذلك لتعيين  $x$  معادلة بدرجة سادسة

تكون تامة ايضاً لكنه يبرهن بالسهولة على انه اذا حذف الحد

الثاني

نصفه ان في القوة غير المتغيرة  
 اذ كان في القوة غير المتغيرة  
 يتغير في القوة غير المتغيرة  
 ويحصل بنسبة لكونه في القوة غير المتغيرة  
 المجهول ك

في اكل العوجي المجهول في القوة غير المتغيرة  
 بنسبة أي مرادفة بدرجة ذاته ويجوز ان واحد يتغير زيادة  
 عن القوة الثالثة المجهول على قوتها ونحوه على وجه غير متساوي  
 المجهول لكونه في القوة غير المتغيرة  
 دائماً ان كل واحد لا يتغير في القوة غير المتغيرة  
 على قوة المجهول الذي يكون دون الاسماء في القوة غير المتغيرة  
 ان هذا التحويل على وجه غير متساوي  
 في المعادلة ذات الدرجة الثالثة توضع بالمعادلة

(١)  $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$   
 غير انه يفرض أن  $x$  ك يمكن تعيينان في ذاته  
 $x = 1$   $x = 2$

(٥٥٠)

أي معادلة حقيقية المكررات تكون مشتملة دائماً على مضارب  
حقيقية بدرجة ثانية في المعادلة ذات الدرجة الرابعة وذلك  
بقطع النظر عن النظريات العمومية التي سبق إثباتها في هذا الموضوع  
فإذا كان  $z = 0$  . آت المعادلة (٤) إلى

$$z^4 - 8z^2 + 8 = 0$$

وجنيد تحقق كلتا المعادلتين (٤) و (٥) إتماماً بوضع

$$8 = 0 - 8 - (8 + 8) = 8 + 8 = 0$$

أو بوضع

$$8 - 8 - 8 = 0 - 8 - (8 + 8) = 8 + 8 = 0$$

فأما المعادلتان الأوليان فيؤخذ منهما أن

$$8 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 8}$$

وأما المعادلتان الأخريتان فيؤخذ من أحدهما

$$\frac{8 + 8}{2} = 8$$

وبوضع هذا المقدار في المعادلة الأخرى يجد

$$8 + 8 - 8 - 8 = 0$$

فإذا كان  $8 - 8$  . تعين بالتأون  $8 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 8}$   
مقداران

التفريس من مجموع البزيمات مقادير متنوعة وهذه  
 المقادير ليست كلها صحيحة للمعادلة  $ص ز = ح$  بل هي  
 مقادير  $ص ز$  تكون صحيحة للمعادلتين  $ص ز = ح$  و  
 $ص ز + ح = ز$  وحيث أن الأولى من هاتين المعادلتين  
 قد استغرقت بالمعادلة  $ص ز = ح$  وكان لكلية ثلاثة  
 جذور تكببية فيكون للمعادلة  $ص ز = ح$  بالنسبة لكل  
 الضرب  $ص ز$  ثلاثة مقادير متنوعة وحيث إذا رمز  
 لجذري الواحد التكبيين التخليين بالرمزين  $ل$  و  $ك$  (كما  
 سيأتي في  $ص ٤٤$ ) كانت مقادير  $ص ز$  الثلاثة المتطابقة  
 مع  $ص ز = ح$  هي  $ص ز = ح$  و  $ص ز = ح$  و  $ص ز = ح$   
 و  $ص ز = ح$

وبناء على ذلك تؤخذ من المعادلة (٤) جذور كل من المعادلة  
 (١) والمعادلتين الحادتين من وضع  $ل$  أو  $ك$  بدل  $ح$   
 وحيث أن  $ح$  كمية حقيقية فيلزم أن يقطع الشوط في القانون  
 (٤) عن جميع توافق مقادير الجذر التكبيبي التي يكون حاصل ضربها  
 تخيلياً

(٤٥٤)

امكن وضع المعادلة الناتجة بالصورة

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{z} + \sqrt{g} \quad (\sqrt{x} + \sqrt{z}) (\sqrt{y} + \sqrt{g}) = k = 0$$

وهذه المعادلة تتحقق بوضع

$$\sqrt{x} + \sqrt{z} = 0 \quad \sqrt{y} + \sqrt{g} = k = 0$$

وهاتان الاماد لثان تؤخذ منها

$$\sqrt{x} = -\sqrt{z} \quad \sqrt{y} = \sqrt{g} \quad \sqrt{x} + \sqrt{z} = 0 \quad \sqrt{y} - \sqrt{g} = 0$$

ومن هاتين المعادلتين ينتج أن  $\sqrt{x}$  و  $\sqrt{z}$  يكونان جذرين للمعادلة

$$t^2 + \sqrt{g}t - \sqrt{x} = 0$$

وجنيد يتحصل

$$\sqrt{x} = -\sqrt{z} \quad \sqrt{y} = \sqrt{g} \quad \sqrt{x} + \sqrt{z} = 0 \quad \sqrt{y} - \sqrt{g} = 0$$

وحيث أن  $\sqrt{x} + \sqrt{z} = 0$  فيكون قانين مقادير  $\sqrt{x}$  و  $\sqrt{z}$  بالصوره

$$(٤) \dots \dots \sqrt{x} = -\sqrt{z} \quad \sqrt{y} = \sqrt{g} \quad \sqrt{x} + \sqrt{z} = 0 \quad \sqrt{y} - \sqrt{g} = 0$$

فاذا قطع النظر عن المتادير الجبرية الموجودة تحت العلامات الجذرية فانه لا يتحصل من المعادلة (٤) الا مقدار واحد التعبر  $\sqrt{x}$  الا انه لما كان للجذر التكعيبي ثلاثة مقادير يتحصل

للتعبر



(٥٠٧)

وحيث أن  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  فيكون  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$   
ومنه ما يجب.

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

وحيث تكون الجذور الثلاثة هي

$$0 \quad 2 = 3$$

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

ولذلك أن مقادير المتغير  $x$  الثلاثة هذه تتحققها المعادلة

المفروضة وإن كانت القيمة  $x$  سالبة كانت القيمة  $x + 2$

سالبة وحيث تكون الجذور التكعيبية الداخلة في المعادلة (٤)

غير محتوية على مقدار حقيقي لكنه لا يلزم أن يؤخذ من ذلك أنه لا يكون

للمعادلة المفروضة الأجزاء وتخييلية لأنه قد تقدم أن الجذور

تكون في هذه الحالة كلها حقيقية وينبغي لتخصيص هذه الجذور

من المعادلة (٤) أن تجرد هذه المعادلة عن الجذور التخيلية

وذلك لا يتأتى إلا إذا تعين كل جذر تكعيبى بحلته عند جذورها

فأركان الحكمة  $\text{ك} + \text{ح}$  موجبة كان لكل جذر تكعبي مقدار حقيقي  
ولنزم على وجه الاختصار للمقدار الحقيقي المفروض للجذر التكعبي  
الأول بالرمز  $\text{هـ}$  والمقدار الثاني بالرمز  $\text{و}$  فنكون المقدارين  
الثلاثة للجذر الأول هي  $\text{هـ} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و}$  والمقادير  
الثلاثة للجذر الثاني هي  $\text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و}$  وحينئذ إذا  
ضربت بطريق التوالى الكميات الثلاث الأول في الكميات الثلاث  
الأخرى ولوحظ أولاً أن  $\text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و}$  مقداران تخيليان وثانياً  
أن  $\text{و} = \text{و}$  أن  $\text{و}$  تخيلي لأنه لما كان  $\text{و} = \text{و}$  كان  $\text{و} = \text{و}$  شهد  
أنه لا يتحصل غير ثلاثة حواصل حقيقية هي  $\text{هـ} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و}$   
 $\text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و}$  ومن هنا يؤخذ أنه لا يكون للتغير من  
الامقادير الثلاثة هذه

$\text{هـ} + \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} + \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و} \text{و}$   
فأما المقدار الأول فهو حقيقي وأما المقداران الآخران فهما تخيليان  
وقد تقدم أن المعادلة لا يزيد عدد جذورها عن درجتها  
ولنمثل لذلك بالمعادلة

$$\text{و} - \text{و} - \text{و} = ٩$$

وحش ان

عظم

(٥٥٩)

وحيث يكون الجذر الحقيقي مبنياً بصورة غير مستقلة مع نه منطق  
لأن المعادلة المفروضة تتحقق بفرض  $١ = ١$

ولكى يستنتج من القانون (٤) المقدار المنبسط للجذر عند ما يكون  
منطقاً يلزم ان تجرى على كل من الجذور التكعيبية الداخلة في المعادلة  
عملية تحويل مشابهة للعملية التي اجريت على المقدار  $١ + ٢ + ٣$  وهذا  
التحويل له ارتباط بالبحث عن الجذر المنطق لمعادلة بدرجة ثالثة  
فاذا كان  $ك + ع = ٠$  كانت كل واحدة من الجذرين المبتدئين

بالوزن  $١ + ٢ + ٣$  مساوية للمقدار الحقيقي المفروض للجذر  $١ - ٢ - ٣$

وحيث أن  $ل + ن = ١$  فيكون

$١ + ٢ + ٣ = ١ - ٢ - ٣$  و  $١ + ٢ + ٣ = ١ - ٢ - ٣$  و  $١ + ٢ + ٣ = ١ - ٢ - ٣$

وحيث تكون الجذور الثلاثة للمعادلة حقيقية ويكون اثنان منها

متساويين

في الحل العمومي للمعادلة ذات الدرجة الرابعة

بنيه الاعمال التي سبقت (في سبعة) توصل الى الحل العمومي لمعادلة

ذات الدرجة الرابعة

ولذا اذا فرضت المعادلة

غير محدود وهذا هو المعروف بالحالة غير المنطقة للمعادلة ذات الدرجة الثالثة

ولنمثل لهذه الحالة بالمعادلة

$$x^3 - 4x + 4 = 0$$

التي نحصل منها عند جعل  $8 = -7$  و  $4 = 10$  في المعادلة (٤)

$$x = \sqrt[3]{-7 + 10} + \sqrt[3]{-7 - 10}$$

وبما أن ذلك يتحقق بسهولة أن المعادلة المفروضة لها ثلاثة جذور حقيقية لأنها تحقق إذا وضع فيها بدل المتغير  $x$  كل من الأعداد  $5 - 2$  و  $2 - 5$

وإن كانت القيمة  $4 + 7$  موجبة كان القانون (٤) غير كافٍ أيضاً لأنه ربما تحصل منه للجذر الحقيقي مقدار صغير على علامات جذرية مع أن الجذر يكون منطقياً ولنمثل لذلك بالمعادلة

$$x^3 - 6x - 4 = 0$$

التي نحصل منها عند جعل  $8 = -6$  و  $4 = 10$  في القانون

$$x = \sqrt[3]{-6 + 10} + \sqrt[3]{-6 - 10}$$

وجيد

وحيث أن  $\Delta$  كفاية عن واحد من الجذور الأربعة للمعادلة (١) فتؤخذ  
هذه الجذور الأربعة من المعادلة (٣) ولما كانت المعادلة (٤)  
لا تحتوي إلا على مربع  $\Delta$  لم تتغير إذا أخذت المعادلة

ش + ح - دس + هـ = . نبدل المعادلة (١) وجنبد تؤخذ  
ايضا الجذور الأربعة لهذه المعادلة من المعادلة (٣) لانه هـ  
بالنسبة الى العلامتين : الموضوعين امام كل علامة جذرية ان  
مقدار ل يتعين بثمانية أوجه ويلزم لاستخراج جذور  
المعادلة  
ش + ح - دس + هـ = .

ان یبہ<sup>ت</sup> أنه اذا ضربت الجکات الثلاث ل+ ے و ل+ لا و ل+ ط  
فی بعضها تحصل من ذلك حاصل ضرب یكون مرکباً من مجموع حواصل  
ضرب الجذور ل و ے و لا و ط ثلاث منافاً الیه الجکة  
ل+ ے+ ل+ لا+ ل+ ط و حیث أن هذه الجکة معدومة  
لکنها تؤول الی ل (ل+ ے+ لا+ ط) فبوخذ من ذلك  
ان الجاصل (ل+ ے) (ل+ لا) (ل+ ط) یساوی مجموع حواصل  
ضرب الجذور ل و ے و لا و ط ثلاث و حیث أن هذا  
المجموع یساوی ے فلا بدخل فی المعادلة (ے) غیر توافق

$$(١) \dots \dots \dots \text{ش} + \text{هش} + \text{س} + \text{ه} = ٠$$

وجعل  $\text{خ} = \text{ز}$  في المعادلة (٧) المتقدمة (في سبيل) آلت  
هذه المعادلة ذات الدرجة الرابعة الى

$$(٢) \dots \dots \dots \text{ز} + \text{ج} \text{ز} + (\text{ه} - \text{ه}) \text{ز} - \text{ز} = ٠$$

وحيث ان هذه المعادلة بدرجة ثالثة فيمكن تبسيط المقادير

العمومية لجذورها بالمثابة المتقدمة (في سبيل) لانه اذا رمز

الى هذه الجذور بالرموز  $\text{ز}$  و  $\text{ز}''$  و  $\text{ز}'''$  كانت مقادير

$\text{ح}$  هي  $\text{ز} \pm \text{ز}'' \pm \text{ز}'''$  و  $\text{ز} \pm \text{ز}'' \pm \text{ز}'''$  لكنه يمكن

ان تكون مقادير  $\text{ح}$  هذه مبينة بالجذور الأربعة للمعادلة (١)

لانه اذا رمز الى هذه الجذور بالرموز  $\text{ل}$  و  $\text{ع}$  و  $\text{لا}$  و  $\text{ط}$  ونلاحظ

ان مجموعها عدوم كانت مقادير  $\text{ح}$  الستة هي

$$\pm (\text{ل} + \text{ع}) \pm (\text{ل} + \text{لا}) \pm (\text{ل} + \text{ط})$$

وجيئذ يكون

$$\text{ل} + \text{ع} = \text{ز} \pm \text{ز}'' \pm \text{ز}''' \quad \text{ل} + \text{لا} = \text{ز} \pm \text{ز}'' \pm \text{ز}''' \quad \text{ل} + \text{ط} = \text{ز} \pm \text{ز}'' \pm \text{ز}'''$$

ومن هنا يتوحد بلا حطة القانون  $\text{ل} + \text{ع} + \text{لا} + \text{ط} = ٠$  أن

$$(٣) \dots \dots \dots \text{ل} = \text{ز} \pm \text{ز}'' \pm \text{ز}'''$$

وحيث

ان تكون جميع جذور المعادلة (١) هذه حقيقية ما لم تكن الجذور  
 الثلاثة للمعادلة (٤) موجبة لان جذور المعادلة (٤) بهذه  
 كتابة عن مربعات حواصل جمع كل اثنين من جذور المعادلة (١)  
 وجنبا اذا كانت جميع جذور المعادلة (١) حقيقية كانت حواصل جمع  
 كل اثنين من هذه الجذور حقيقية ايضا وبناء على ذلك تكون مربعات  
 حواصل الجمع هذه موجبة

فاذا كانت الجذور  $z_1, z_2, z_3$  موجبة كان حاصل الضرب  
 $(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)(z_2 + z_3)$  موجبا وجنبا لا تكون  
 المقادير (٤) موافقة الا في الحالة التي يكون فيها  $z_1, z_2, z_3$  موجبا فقط  
 اما اذا كان  $z_1, z_2, z_3$  سالبا فانه يلزم في هذه المقادير تغيير اشارة  
 واحدة من المعلومات الجذرية

واذا فرضنا الآن ان الجذرين  $z_1, z_2$  موجبان فانه يمكن في هذه  
 الحالة وضع  $z_1 = \sqrt{a}, z_2 = \sqrt{b}$  بدل علامتي الجذر  
 $z_1 + z_2 = \sqrt{a} + \sqrt{b}$  وجب ان  $z_3 = \sqrt{c}$  هنا كتابة عن كيتين  
 موجبتين فيؤول حاصل القرب  $(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)(z_2 + z_3)$  الى  
 $-\sqrt{abc}$

علامات العلامات الجذرية المحققة لهذا الشرط وهو ان حاصل ضرب هذه العلامات الجذرية يكون متحدًا في العلامة مع  $\epsilon$  فاذا افترضنا طرق تعيين الجذور الثلاثة الجبينة بالمقادير  $+ \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} + \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} + \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} \overline{\epsilon}$  . يمكنه الوضع بحيث يكون حاصل ضربها متحدًا في العلامة مع  $\epsilon$  فتكون الجذور الأربعة للمعادلة المفروضة مبينة هكذا:

$$\left. \begin{aligned} & \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} - \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} + \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} + \\ & \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} + \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} - \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} + \\ & \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} + \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} + \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} - \\ & \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} - \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} - \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} \overline{\epsilon} \end{aligned} \right\} \dots (٤)$$

يسند وبناءً على ذلك يكون واحد من جذور المعادلة (٤) موجباً لانحدها الاخير سالب ويكون جذورها الآخران متحدين في العلامة لان حاصل ضرب الجذور الثلاثة موجب ويمكن ان يكون هذان الجذوران تخيليين

ويؤخذ من المعادلة (٣) انها اذا كانت الجذور الثلاثة للمعادلة (٤) موجبة كانت جميع جذور المعادلة (١) حقيقية ولا يمكن



متوزن في المعادلة مع  $\frac{1}{2}$  على وجه بحيث يكون  
 متوزن في المعادلة مع  $\frac{1}{2}$  وبهذه المثابة تكون الجذور الأربعة  
 مبنية هكذا

$$- \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{7} \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} \quad \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7} \quad \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7}$$

فأما الجذران الأولان فهما حقيقيان وأما الجذران الآخران فهما

تخيليان

وما ينبغي التنبيه عليه أن المعادلة (١) هي المعروفة بألكة المعادلة (١)

### في تنقيص درجة المعادلات

سند قد شوهد فيما تقدم أن أي معادلة محتوية على جذور  
 متساوية تنقسم إلى عدة معادلات أخرى دونها في الدرجة  
 ولذا يقال أن هذه المعادلة تكون قابلة لتنقيص درجتها  
 ويمكن أيضاً تنقيص درجة المعادلة (١) أن بعض جذورها  
 تتحقق به شروط مخصوصة

سند فإذا فرض أنه يوجد بين  $x$  و  $y$  اللذين هما من جذور  
 المعادلة (١) =  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$  ارتباط مبين بالمعادلة

$$(1) \dots \dots x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r$$

ولكى يكون هذا الحاصل متخذاً في العلامة مع  $r$  يلزم ان يتعين  $+ \sqrt{r}$   
على وجه بحيث يكون متخالفاً في العلامة مع  $r$  وبهذه المثابة تكون  
المجذور والأربعة مبينة هكذا

$$+ \sqrt{r} + (-r - \sqrt{r})$$

$$+ \sqrt{r} - (-r - \sqrt{r})$$

$$- \sqrt{r} + (-r + \sqrt{r})$$

$$- \sqrt{r} - (-r + \sqrt{r})$$

وهذه المجذور والأربعة تكون تخيلية مالم تكن  $r = ك$  لان المقدارين  
الاولين يؤولان جنساً الى القيمة الحقيقية  $\sqrt{r}$   
واذا فرض أن الجذرين  $ز'$  و  $ز''$  تخيليان كان

$$ز' = \sqrt{r} + ك \sqrt{-1} \quad ز'' = -\sqrt{r} + ك \sqrt{-1}$$

وبناء على ذلك يمكن وضع مقدارى  $\sqrt{r}$  هكذا  $\pm (م + 2\sqrt{-1})$   
ومقدارى  $\sqrt{r}$  هكذا  $\pm (م - 2\sqrt{-1})$  (كاسمأتى في المبحث)  
وإذا أخذ بدل  $\sqrt{r} + \sqrt{-1}$  و  $\sqrt{r} - \sqrt{-1}$  المقداران

$$م + 2\sqrt{-1} \quad م - 2\sqrt{-1} \quad \text{حدث} \quad (\sqrt{r} + \sqrt{-1}) (\sqrt{r} - \sqrt{-1}) = م^2 + ٤$$

وجنساً يلزم ان يكون حاصل الضرب  $(+ \sqrt{r})(+ \sqrt{-1}) (+ \sqrt{r})(- \sqrt{-1})$   
متخذاً

(٥٦٧)

أُخِذَ هَذَا الْجَذْرُ إِيضًا مِنَ الْمَعَادِلَةِ  $\delta = \epsilon$ . أَعْنَى أَنَّهُ يَلِزَمُ فِي  
هَذِهِ الْحَالَةِ أَنْ يَوْضَعَ  $\epsilon$  فِي الْإِرْتِبَاطِ (١) فَيَكُونُ الْجَذْرُ الثَّانِي  
هُوَ الْكِيَّةُ  $\epsilon$  بِعَيْنِهَا لَكِنَّهُ لَا يَنْبَغِي أَنْ يَسْتَنْبِطَ مِنْ ذَلِكَ أَنَّ  
الْجَذْرَ  $\epsilon$  يَدْخُلُ فِي الْمَعَادِلَةِ  $\delta = (\epsilon)$ . مَرَّتَيْنِ لِأَنَّهُ يَكْفِي أَنْ  
يَكُونَ هَذَا الْجَذْرُ دَاخِلًا فِي هَذِهِ الْمَعَادِلَةِ مَرَّةً وَاحِدَةً لِيَكُونَ  
مَحَقًّا لِكُلِّ مِنَ الْمَعَادِلَتَيْنِ  $\delta = (\epsilon - \epsilon)$  وَ  $\epsilon = \epsilon$ .

وَيُشَاهَدُ بِالسَّهُولَةِ أَنَّهُ إِذَا دَخَلَ جَذْرٌ عِدَّةَ مَرَّاتٍ فِي الْمَعَادِلَةِ  
 $\delta = (\epsilon)$ . دَخَلَ إِيضًا فِي الْمَعَادِلَةِ  $\epsilon = \epsilon$ . بِقَدَرِ مَا دَخَلَ فِي  
الْمَعَادِلَةِ الْمَذْكُورَةِ لِأَنَّ جَذْرًا لِلْمَعَادِلَةِ  $\delta = (\epsilon - \epsilon)$ .  
هُوَ مُقَادِيرُ  $\epsilon$  الْحَادِثَةِ مِنْ جَعْلِ  $\epsilon - \epsilon$  مَا وَثَّقَ بِالتَّوَلَّى  
لِكُلِّ مِنْ جَذْرٍ وَالْمَعَادِلَةِ  $\delta = (\epsilon)$ . وَجَنِّدُ تَكُونُ الْجَذْرُ الْمَشْتَرَكُ  
بَيْنَ الْمَعَادِلَتَيْنِ  $\delta = (\epsilon - \epsilon)$  وَ  $\epsilon = (\epsilon)$ . أَيْ جَذْرُ  
الْمَعَادِلَةِ  $\epsilon = \epsilon$ . هِيَ جَذْرُ الْمَعَادِلَةِ  $\delta = (\epsilon)$ . الَّتِي يَكُونُ  
الْمِقْدَارُ  $\epsilon - \epsilon$  مَا وَثَّقَ بِالْكُلِّ وَاصِبُهَا

بِهَيْدٍ وَمَتَى كَانَتْ  $\epsilon = \epsilon$  آلَ الْإِرْتِبَاطِ (١) إِلَى  $\epsilon = \epsilon$  وَ  
وَلَا اخْتِصَارَ يَوْضَعُ  $\epsilon = \epsilon$  وَحَيْثُ أَنَّ الْجَذْرَيْنِ جَوْنِ  $\epsilon$

فيقال حيث أن  $ه$  و  $و$  من جذور المعادلة  $د(س) =$  فحيث

$د(ه) = ١٠$  و  $د(و) = ٠$  وإذا وضع في المعادلة  $د(و) = ٠$

مقدار و المستخرج من المعادلة (١) آت إلى  $د(٨ - ٧) = ٠$

وجنبذا تكون النكبة  $ه$  محققة لمعادلتين  $د(س) = ١٠$  و  $د(٨ - ٧) = ٠$

معا وبنا على ذلك يوجد للطرفين الأولين من هاتين المعادلتين

قاسم مشترك إذا جعل مساويا للصفر تعين الجذر  $ه$

فإذا جعل  $ه$  رمز القاسم المشترك الأعظم بين الجذبتين

الكبر في الحدود  $د(س) و د(٨ - ٧)$  وفرض أن  $ه$

أحد من  $ه$  أدير  $س$  به تتحقق المعادلة  $د(س) = ١٠$  كما ذكرنا

فقد استدلنا بالمعادلتين  $د(س) = ١٠$  و  $د(٨ - ٧) = ٠$

معا وبنا أن  $د(٨ - ٧)$  معدوم فيكون  $٨ - ٧$  جذرا

للمعادلة  $د(س) = ١٠$  وجنبذا جعل و رمز هذا الجذر

كانت مكان  $ه$  و كتابة عن جذري المعادلة  $د(س) = ١٠$

المختصين بالارتباط  $٨ + ٧ = ١٥$  و  $٨ - ٧ = ١$

فإذا وجد معادلة  $د(س) = ١٠$  جذر كالجذر  $ه$  بجنبذا يكون

$٨ - ٧ = ١$  أو  $٨ + ٧ = ١٥$

أخذ

المفروضة على س - س ف - ز تحصل من ذلك باق بدرجة  
اولى هو  $ع + س + ك$  وحيث أن  $ع + س + ك$  كيان كثيرتا  
الحدود لا تشملان الاعلى المجهول ز فلكي تكون النسبة  
بلا باق يلزم ان يكون  $ع = س = ك$  . وحيث يكون للكيان  
 $ع + س + ك$  قاسم مشترك اذ جعل ما وياً للصفر تعينت به مقادير  
ز ثم انه يتكون من المعادلة س - س ف - ز = . مقادير  
للتغير س يكون كل واحد منها مطابقاً المقدار من مقادير ز  
ويمكن ايضاً استعمال هذه الطريقة في حالة ما اذا كانت  
بعض جذور المعادلة المفروضة محقة للارتباط  $ح + و = ف$   
سند ولنفرض الآن الجذور الثلاثة  $ح و و ه$  من  
المعادلة  $د (س) = .$  تحقق الارتباط  $ع + ح + ك + و + ه$   
 $= ف (و + ح + ك + و + ه)$  كيات معلومة فيلزم ان يضاف  
الى هذا الارتباط المعادلات  $د (ح) = و$  و  $د (و) = و$  و  $د (ه) = .$   
فاذا حذف  $و و ه$  من المعادلتين الاخيريتين ومن الارتباط  
 $ع + ح + ك + و + ه = ف$  تحصلت من ذلك معادلة تكون  
مشتملة على  $ح$  وتكون محقة هي والمعادلة  $د (ح) = .$

داخلاً بمثابة واحدة في الارتباط المفروض فيتعين كلاهما  
بالمعادلة  $\frac{1}{2} = 0$  . وجنبد يلزم ان يكون هذان الجذران  
معلومين من هذه المعادلة التي تعين بهما زيادة على ذلك

للمعادلة المفروضة جميع الجذور المحققة للارتباط

$s + s = f$  الذي يؤخذ منه ان  $s = \frac{1}{2} f$

فاذا كانت المعادلة  $r(s)$  . مشتملة على جذور كل منها

يساوى  $\frac{1}{2} f$  وأخرى يتكون من كل اثنين منها مجموع يساوى

$f$  فان المعادلة المحولة  $r(s-s)$  . الحادثة من المعادلة

$r(s) = 0$  بواسطة الارتباط  $s + s = f$  تكون مساوية

للمعادلة المفروضة وبناءً على ذلك لا يمكن هنا استعمال الطريقة

السابقة

وفي هذه الحالة اذا حذفنا في مبدأ الأمر الجذور التي كل واحد

منها يساوى  $\frac{1}{2} f$  أمكن تحليل المعادلة الناتجة الى مضارب

بدرجة ثانية توضع بالصورة  $s^2 - s - s = f + z$

و  $z$  هو عبارة عن حاصل ضرب الجذرين  $s$  و  $s$  اللذين يتحصل

بالنسبة لهما  $s + s = f$  فاذا قسم الطرف الأول من المعادلة

المفروضة



وجنْدِيكُنْ لهما تين المعادلتين قاسم مشترك اذ جعل ما وياً  
 للصفر تعيّن به الجذر  $هـ$  فان كانت  $ع = ك$  تعين بالقاسم  
 المشترك الجذران  $هـ و$  اعني انه يكون بدرجة ثانية وان  
 كانت  $ع = ك = ر$  كان هذا القاسم المشترك بدرجة ثالثة  
 سنبذ وما ذكر في شأن الارتباطات المبينة بمعادلات من  
 المعادلات ذات الدرجة الاولى يستعمل في الارتباطات من  
 حيث هي والصعوبات التي توجد في مسائل هذا النوع لا تقرب  
 الاعلى المحذف المطلوب عمله

وقد قال المهندس لاكروا ان تعيين درجة المعادلات لا يتأني  
 الا اذا شوهد بين مجاهيل مسألة ممكنة أن عدد المعادلات  
 يزيد عن عدد المجاهيل وهذا يحصل غالباً اذ لوحظت المسألة  
 المفروضة بأوجه متنوعة لانه يوجد جنْدِيكُنْ بالنسبة لمجموع  
 واحد معادلتان انتهائيتان باتحادهما مع بعضهما يكون  
 لهما قاسم مشترك منه يؤخذ ابط حل للمسألة

سنبذ ويلزم في بعض الأحيان تعيين الارتباطات الواقعة  
 بين المكررات غير المعينة لمعادلة حتى تكون لهذه المعادلة  
 جذور



(٥٧٢)

(ح ع + ق) س + ح + ح + ح - ح - ل

ويلازم لكي تكون النسبة صحيحة ينبغي أن يكون

$$ح ع + ق = ٠ \quad ح + ح + ح - ح - ل = ٠$$

ومحذف ح من هاتين المعادلتين يشاهد أن الارتباط المطلوب

يكون مبيثا بالصورة

$$ق - ح - ك ق + ح ع ل = ٠$$

في المعادلات العكسية

يطلق على المعادلة اسم المعادلة العكسية إذا كانت لا تتغير

عند ما يوضع فيها  $\frac{1}{x}$  بدل من

مثلاً لتفرض المعادلة الزوجية الدرجة

$$س + ح + ح + ح + ح + ق + ق + ل + ل + ح + ح + ح = ٠$$

فإذا وضع في هذه المعادلة  $\frac{1}{x}$  بدل من وضربت جميع حدودها

في س وفست على ح التالي

$$س + ح + ح + ح + ح + ق + ق + ل + ل + ح + ح + ح = ٠$$

ولكي تكون هذه المعادلة مختلفة عن المعادلة المفروضة يلزم

أن يكون



علم انه يلزم لكي تكون أي معادلة فردية الدرجة عكسية أن مكرراً  
الحدود التي على ابعاد متساوية من النهايتين تكون متساوية أو انها  
تكون متحدة في المقدار الرقي ومتخالفة في العلامة

بسيط ويؤخذ من تعريف المعادلات العكسية انه اذا تحققت  
معادلة مشابهة للمعادلة المفروضة بالجذور  $e, e, e, e, e$  ونحو  
تحققت أيضاً بالجذور  $\frac{1}{e}, \frac{1}{e}, \frac{1}{e}, \frac{1}{e}, \frac{1}{e}$  ونحو وبنا على ذلك اذا كانت  
 $e$  مختلفاً عن  $\frac{1}{e}$  كان  $e$  مختلفاً عن  $\frac{1}{e}$  مختلفاً  
عن  $\frac{1}{e}$  ونحو وكانت المعادلة زوجية الدرجة وزيادة على  
ذلك يكون الحد الأخير المساوي لحاصل ضرب الجذور سبباً بالمقدار  
واذا فرضان  $e = \frac{1}{e}$  كان  $e = 1$  ومن هنا يكون  
 $e = \pm 1$

اذا تقر هذا وكان حاصل ضرب جذور معادلة مساوية للحد الأخير  
مأخوذاً بعلامته ان كانت المعادلة زوجية الدرجة وبعلاوة  
متخالفة لعلامته ان كانت فردية لا درجة نتج ما تقدم لنا ان  
معادلة عكسية من المعادلات الفردية الدرجة التي يكون  
حدها الأخير سبباً بالمقدار  $1+$  يكون لها جذور يساويها





(٥٧٦)

وان اى معادلة عكسية من المعادلات الفردية الدرجة التى يكون حدها  
 الأخير مبنياً بالمقدار - ١ يكون لها جذر يساوى ١ + و ان  
 اى معادلة عكسية من المعادلات الزوجية الدرجة التى يكون  
 حدها الأخير مبنياً بالمقدار - ١ يكون لها جذر يساوى - ١  
 وجذر يساوى ١ + و حينئذ احذف من هذه المعادلات  
 الجذران ١ + و - ١ انحوت الى معادلات اخرى عكسية من  
 المعادلات الزوجية الدرجة التى تكون فيها مكررات الحدود  
 الموضوعة على ابعاد متساوية من النهايتين متساوية ومنجدة  
 فى العلامة

ويتوصل الى مثل هذه النتائج بمجرد النظر الى المعادلة

$$(١) \dots x^4 + ٤x^3 + ٦x^2 + ٤x + ١ = ٠$$

التي يمكن وضعها بالصورة

$$x^4 + ٤x^3 + ٦x^2 + ٤x + ١ = (x^2 + ٢x + ١)^2 = ٠$$

ومن هنا يؤخذ ان الطرف الأول من هذه المعادلة يحوى على المضروب  
 ٤ + الذى ينتج منه الجذر - ١ فاذا اجريت عملية قسمة كل من  
 الجات ذات الحدين  $x^4 + ٤x^3 + ٦x^2 + ٤x + ١$  على المضروب

بأقياً على حاله عندما توضع البكبة  $\frac{1}{s}$  بدل  $s$  أو  $s$  بدل  $\frac{1}{s}$   
فيؤخذ من ذلك أنه إذا جعل

$$(٤) \dots\dots\dots s + \frac{1}{s} = z$$

كانت مقادير المجهول  $z$  داخلية في معادلة هي في الدرجة على النصف من  
المعادلة المفروضة .

فإذا فرضت المعادلة العمومية ذات الدرجة السادسة

$$(٥) \dots\dots\dots s^6 + c_5 s^5 + c_4 s^4 + c_3 s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + 1 = 0$$

لزم لتحصيل المعادلة التي تتحصل منها مقادير المجهول  $z$  أن يحذف

المجهول  $s$  من هذه المعادلة والمعادلة (٤) وذلك بأن تقسم

جميع حدود المعادلة (٥) على  $s^6$  فتتحول إلى الصورة

$$(٦) \dots\dots\dots 1 + \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s^2} + \frac{c_3}{s^3} + \frac{c_4}{s^4} + \frac{c_5}{s^5} + \frac{1}{s^6} = 0$$

ويرفع طرفي المعادلة (٦) إلى الدرجة الثانية يحدث

$$s + \frac{1}{s} = z - c_5$$

فإذا ضربت هذه المعادلة في المعادلة (٤) حدث

$$s + \frac{1}{s} = z - c_5, \quad z - c_5 = (s + \frac{1}{s}) = z - c_5$$

وإذا وضعت في المعادلة (٦) المقادير (٦) المقادير  $\frac{1}{s} + s + \frac{1}{s} + s + \frac{1}{s} + s$

واذا فرضت المعادلة

$$ش - ١ = ع + ش - ك ش - ع - ش - ١ = ٠$$

التي يمكن وضعها بالصورة

$$ش - ١ + ع - ش + ك ش - ع - ش - ١ = ٠$$

مشاهد من ذلك ان الطرف الأول من المعادلة يحتوي على المضروب

ش - ١ الذي يؤخذ منه الجذران  $ش = ١ + ١$  و  $ش = ١ - ١$  فاذا

اجريت عملية قسمة كل من الكميات ذات الحدين  $ش - ١$  و  $ش - ١$

على المضروب  $ش - ١$  نحصلت من ذلك المعادلة

$$ش + ع + ش + ١ + ك ش + ع - ش - ١ = ٠$$

نريد ولنتصدى الآن لبيان الكيفية التي بها يمكن تحويل حل معادلة

مكعبة ذو زوجية الدرجة مكرراتها التي على ابعاد متساوية من

النهايتين متساوية ومنتهدة في العلامة الى حل معادلة على النصف منها

فقاله درجة فنقول —

حيث ان جذور المعادلة تنقسم الى جملتين بحيث اذا كان واحد

من جذور واحد هاتين الجملتين مبيثا بالرمز  $ش$  كان الجذر

المقابل له من العلامة الاخرى مبيثا بالرمز  $ش$  والمجموع  $ش + ش$

باقيا



(٥٨١)

س +  $\frac{1}{س}$  وبهذه الصورة يستدل على أنه يتحصل للبيكة ذات  
الحدين س +  $\frac{1}{س}$  مقدار يكون درجته ٢ بالنسبة إلى ز  
سند ولتمثل لذلك بالمعادلة

$$٤ - س + ٤س + ٥٧ - س + ٧٣ - س + ٥٧ - س + ٤ - س = ٠$$

وبنفسه هذه المعادلة على س وجع الحدود المتماثلة الوضع بحيث

$$٠ = ٧٣ - (س + \frac{1}{س}) + ٥٧ + (س + \frac{1}{س}) - ٤س + ٤ - س = ٠$$

وبفرض س +  $\frac{1}{س}$  = ز يحدث

$$٤ - ز = س + \frac{1}{س} \quad ٥٧ - ز = س + \frac{1}{س} \quad ٧٣ - ز = س + \frac{1}{س}$$

وجيئذ توول المعادلة السابقة إلى

$$٤ - ز + ٤س + ٥٧ - ز - ٤س = ٠$$

وحيث أن هذه المعادلة تتحقق بالجذر ١ + فيجوز الضروب

س - ١ تحصل من ذلك معادلة ذات درجة ثانية كل من

جذريها يباوى  $\frac{٢}{٤}$

فاذا جعل ز =  $\frac{٢}{٤}$  حدث س = ٤ س =  $\frac{1}{٤}$  ويجعل

ز = ١ يحدث

$$س = \frac{1}{٢} (\pm ١ - \sqrt{٣})$$

تخصت من ذلك معادلة بدرجة ثالثة ممتلئة على المجهول  $z$   
ومنى تحمكت جذور هذه المعادلة تعينت مقادير  $s$  بواسطة  
المعادلة (٤) بعد تحويلها الى المعادلة

$s - z s + 1 = 0$  . التي يؤخذ منها أن  $s = \frac{1}{z} \pm \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1}$   
وكل مقدار مفروض للمتغير  $z$  يؤخذ منه مقداران للمتغير  $s$   
يكون حاصل ضربهما مساوياً للواحد

ويمكن بيان الكميات ذات الحدين  $s + \frac{1}{s}$  و  $s - \frac{1}{s}$  و  $s^2 + \frac{1}{s^2}$  و  $s^2 - \frac{1}{s^2}$   
بالنسبة للكمية  $z$  مع ملاحظة الارتباط  $s + \frac{1}{s} = \frac{1}{z}$  أن يتعمل  
القانون العمومي الذي يتوصل اليه بواسطة ضرب  $s^2 + \frac{1}{s^2}$  في  $s$   
+  $\frac{1}{s}$  على موجب قواعد الضرب فيحدث

$$\left(s + \frac{1}{s}\right)\left(s^2 + \frac{1}{s^2}\right) = \left(s + \frac{1}{s}\right)\left(s^2 + \frac{1}{s^2}\right) + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4}$$

ومن هنا يؤخذ أن

$$(v) \dots s^4 + \frac{1}{s^4} = \left(s^2 + \frac{1}{s^2}\right)\left(s + \frac{1}{s}\right) - \left(s^2 + \frac{1}{s^2}\right)\left(s + \frac{1}{s}\right)$$

وجبذة تنبع مقادير الكميات ذات الحدين  $s + \frac{1}{s}$  و  $s - \frac{1}{s}$   
 $s^2 + \frac{1}{s^2}$  من القانون (v) وذلك بان يجعل فيه على التوالي  
 $s = 1, s = i, s = -i, s = -1$  ويوضع في كل مرة من ذلك  $z$

(٢٢٢)  
(١-٢) س-ز ويلزم النتيجة الحذف وتسمى بهذا التسمية  
س-ز س+١ على (١-٢) س-ز فتبين ان هذه التسمية الى  
باق هو الواحد وبناء على ذلك نتحصل جميع الحلول المشتركة بين المعادلة  
المفروضة س-ز س+١ = ٠ بأن نوضع على التوالي في هذه المعادلة  
جميع مقادير ز المستخرجة من المعادلة ١-٢ س-ز س+١ = ٠  
التي هي عين المعادلة المتحصلة آنفاً

وعلى ذلك يكون للمعادلة المفروضة جذران متساويان كلاهما  
ياوى ، وآخران كلاهما ياوى  $\frac{1}{2}$  وجذران تخيليات  
ها  $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{-3})$

سند ويمكن ان نستعرض طريقة الحذف المقدمة في (السند)  
بالطريقة العمومية المقدرة في الباب الحادى عشر فتقول للمعادلة  
(٤) كما ذكر الى

$$ش - زس + ١ = ٠$$

فاذا كانت المعادلة المفروضة لا تختلف عن المعادلة المذكورة  
في المثال السابق فانه يحصل بعد جعل  $م + س + ح$  رمز الباقى  
قمة الطرف الاول من هذه المعادلة على ش - زس + ١

$$م = ٤ - زس + ز + ١ + ٤ز - ز - ٤ز + ٤ز + ٥، ف$$

$$م = ٤ - زس + ز + ٤ز - ز - ٤ز + ٤ز + ٥، ز$$

ومن هنا يتبين ان الكثر في الحدود  $م + س + ح$  لها  
قاسم مشترك هو

$$٤ - زس + ز + ٤ز - ز - ٤ز + ٥،$$

وحينئذ يحصل من قسمة  $م + س + ح$  على هذا القاسم الخارج  
(٥)

وبناء على ذلك لا تعبير في الأعمال علامة جذر تخيلية غير العلامة ٣-٧

فإذا فرضت الآن المعادلة العامة ذات الدرجة الثانية

$$x^2 - c x + k = 0$$

شاهد أنه إذا كان  $k < \frac{1}{4} c^2$  كانت جذور هذه المعادلة  
تخيلية ولتقترب الكور بوضع  $\frac{1}{4} c^2$  بدل  $\frac{1}{4} c$  وبيان أن  $k$   
أكبر من  $\frac{1}{4} c^2$  يفرض أن  $k = \frac{1}{4} c^2 + \epsilon$  فتؤول المعادلة  
المفروضة إلى

$$x^2 - c x + \frac{1}{4} c^2 + \epsilon = 0$$

وحذو هذه المعادلة تعلم من القانون

$$x = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \epsilon}$$

الذي يكتب بمقتضى ما ذكره كذا

$$x = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \epsilon}$$

ويطلق على اسم المتدار التخيلي على كل كمية لا يمكن بيانها بأي مقدار حقيقي  
موجب أو سالب غير أن الكيتين التخيليتين الموضوعتين بالصورة  
 $\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - \epsilon}$  أو  $\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - \epsilon}$  هما اللتان تتصوران دورن غيرها  
في الحسابات الجبرية ولذا إذا أطلق اسم الكمية التخيلية لا يشترط

المعادلتين متحققاً بمقادير  $z$  فيلزم ان يبحث عن القاسم المشترك  
الأعظم بين الكيتين الكبير في الحد و  $4m$   $m$  ويجعل ما و  $1$   
للمصغر فتحصل من ذلك المعادلة المشتملة على المجهول  $z$

في تحويل المقادير التجزئية بالدرجة الثانية

الى الصورة  $l + 5 - 2 = 3$  وقياسها وجمعها وطررها وضربها ونسبتها  
وهي على هذه الصورة

بند هذا وان كان تعيين الجذر التربيعي للقيمة سالبة يدل على  
عملية مستحيلة الا ان علماء الجبر يفرضون ان الجذور التخيلية كميات  
ويستعملونها بكثرة في الحسابات بواسطة بعض توافق  
مثلاً اذا جعل  $x$  رمز القيمة الحقيقية كانت جذور القيمة السالبة  
-  $x$  مبنية في العادة بالصورة  $\pm \sqrt{-x}$ ، وحيث انه يمكن  
اعتبار القيمة السالبة كحاصل ضرب  $x$  في  $-1$  فان فرض ان الجذور  
التربيعية لهذا الحاصل منحصلة كما في الحالة التي تكون فيها المضارب  
موجبة من ضرب الجذور التربيعية لهذه المضارب في بعضها  
فان الجذور التربيعية للقيمة -  $x$  تكون مبنية بالصورة  $\pm \sqrt{-x}$   
وحيث يكون المقداران  $\pm \sqrt{-x}$   $\pm \sqrt{-x}$  متكافئين  
وتأ

يلاحظ ان مربع  $١٢٧$  هو  $١$  ولنوضح ذلك بنسالة مشتملة على كمية  
جمع مقدارين تخيليين وطرحهما وضربهما هو

$$١٢٧ = (١٢٧ + ٤) + (١٢٧ - ٤) = (١٢٧ + ٤) + (١٢٧ - ٤)$$

$$١٢٧ = (١٢٧ + ٤) - (١٢٧ - ٤) = (١٢٧ + ٤) - (١٢٧ - ٤)$$

$$١٢٧ = (١٢٧ + ٤) + (١٢٧ - ٤) = (١٢٧ + ٤) + (١٢٧ - ٤)$$

فاذا اجريت عملية الجمع على المقدارين المقترنين

$$١٢٧ + ٤ = ١٣١ \quad ١٢٧ - ٤ = ١٢٣$$

تحصلت من ذلك الكمية الحقيقية  $١٢٣$  واذا ضربنا في بعضها  
كان حاصل ضربهما كمية حقيقية هي  $١٢٣ + ٤$

ويطلق على المقدار المطلق الجذر التربيعي للكمية  $١٢٣ + ٤$  اسم

قياس كل من المقدارين  $١٢٣ + ٤$  و  $١٢٣ - ٤$  ومن هنا

يؤخذ ان قياس اى كمية حقيقية هو المقدار المطلق لهذه الكمية

ولكى يكون القياس  $١٢٣ + ٤$  معدوماً يلزم ان يكون  $١٢٣ = ٤$ .

ليؤول المقدار  $١٢٣ + ٤$  في هذه الحالة الى الصفر ويلزم

بعكس ذلك لكي يكون المقدار  $١٢٣ + ٤$  معدوماً ان يكون قياسه

ساوياً للصفر لان هذا يستلزم جعل  $١٢٣ = ٤$ . ليكون

في العادة الا الى الكمية الموضوعة بهذه الصورة

فاذا انعدمت في المقدار ل + ح = ١٢ الكمية في التي هي مكرر  
 ١٢ الى الحد ح = ١٢ الى الصفر وبهذا يؤول المقدار المذكور الى الكمية  
 الحقيقية ل وحينئذ تعتبر المقادير الحقيقية كعائلة خصوصية  
 من المقادير التخيلية ومن البديهي انه يلزم لكي تكون المعادلة  
 التخيلية متساوية ان تكون في هذه المقادير الكميات  
 الحقيقية متساوية وتسا على ذلك فأي معادلة طرفيها كيان تخيلتان  
 تكون كفاية عن حاصل جمع معادلتين طرفيها هي الكميات الحقيقية الداخلة  
 في هذه المعادلة مثلاً المعادلة

$$ل - ح = ١٢ \quad ١٢ = لا + ط$$

كفاية عن المعادلتين الحقيقيتين

$$ل = لا \quad ح = ط$$

ويقال للمعادلتين التخيليتين مقترنان اذا كانا لا يختلفان عن بعضهما  
 الا بعلامة مكرر ١٢ وذلك كالمعادلتين

$$ل - ح = ١٢ \quad ل - ح = ١٢$$

سند المقادير التخيلية تطبق عليها القواعد الحايية غير انه



(٥٨٩)

وحيث ان هذا القياس ثمانية عن حاصل ضرب اقيسة المضارب التخيلية  
التي هي يكات حقيقية موجبة فلا يكون معدوماً الا اذا كان قياس واحد  
من هذه المضارب مساوياً للصفر وهذا لا يتأتى الا اذا كان واحد  
من المضارب المذكورة معدوماً وحيث بلزوم لكي يكون اى حاصل  
ضرب مركب من مقادير تخيلية معدوماً أن يكون واحد من هذه المقادير  
مساوياً للصفر .

سند اذا اجريت عملية الضرب بضربنا الى على الكمية  $1-x$  خصلت  
من ذلك في مبداء الامر لهذه الكمية القوى متنوعة

$$(1-x) = 1 - x = (1-x) \cdot 1 = 1 - x$$

$$(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2 = (1-x) \cdot (1-x) = 1 - x$$

وحيث أن القوة الواحدة للكمية جذر  $1-x$  هي  $1+x$  فاذا تكونت  
القوى التي تزيد عن هذه القوة خصلت من ذلك المقادير الأربعة

$$1-x \cdot 1-x \cdot 1-x \cdot 1-x$$

ويمكن بيان جميع قوى الكمية  $1-x$  بواسطة اربعة قوانين ذواتها

انما اذا جعل  $x$  رمز العدد صحيح كانت جميع الاعداد الصحيحة

محصورة في القوانين الأربعة  $2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^7$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ومن البديهي انه يترتب دائماً عكساً في القياسين التخييليين قوائ  
قياسيهما وعكس ذلك لا يجوز

بمبدأ قياس المقدار التخييلي المتحصل من ضرب المقدارين  $ل + ط = ١٢٧$   
و  $لا + ط = ١٢٧$  في بعضهما هو

$$\left[ (ل لا ط ط) + (ل ط ط لا) \right]$$

وحينئذ يتحصل بواسطة القواعد الحماية

$$(ل لا ط ط) + (ل ط ط لا) = (ل لا ط ط) + (ل لا ط ط)$$

وبناء على ذلك يكون القياس المذكور مساوياً  $(ل لا ط ط) + (ل لا ط ط)$  أو

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

ومن هنا يؤخذ ان قياس حاصل ضرب مضروبين تخيليين يكون

مساوياً لحاصل ضرب قياس هذين المضروبين وحينئذ يكون

قياس حاصل ضرب أي جملة من المضاريب التخيلية مساوياً لحاصل

ضرب أقيسة هذه المضاريب

وليزم لكي يكون أي حاصل ضرب مركب من عدة مضاريب تخيلية

معدوماً ان يكون قياس هذا الحاصل معدوماً (كافي بمبدأ)

حيث

فان

في الجذور التربيعية للمقدار

بعضها هو خارج نسبة

$$\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} + \frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}$$

بعضها هو خارج نسبة

بعضها هو خارج نسبة

$$\frac{(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}{(5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})} = \frac{25 - 5}{25 - 5} = 1$$

$$\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} + \frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} = 2$$

ويؤخذ من القاعدة المتقدمة (في بنيد) ان قياس خارج نسبة الكيتين

التي لبتين على بعضها هو خارج نسبة

ذلك بمقدار هذا المقادير

في الجذر التربيعي للمقدار

تعلق المقادير الجبرية للجذور مما كانت درجاتها

بمقتضى ما تقدم (في بنيد) من الجزء الأول) يتم

$$(1) \sqrt{5 + \sqrt{5}} + \sqrt{5 - \sqrt{5}} = \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} & \text{وجنِّدْ يُؤخِّدْ مَا تَقْدَمُ} \quad (٥٩٠) \\ & \gamma - = \overset{2^4}{\gamma} - = \overset{2^4}{\gamma} (١٧) \quad \gamma - = \overset{2^4}{\gamma} (١٧) \\ & \gamma - = \overset{2^4}{\gamma} (١٧) \quad \gamma - = \overset{2^4}{\gamma} (١٧) \end{aligned}$$

نَسْبُ فَإِذَا قَسَمْتَ الْكِيَّةَ التَّجْلِيَّةَ لَ + ٥ = ١٧ عَلَى الْكِيَّةِ لَ

لَا وَفُضَّ أَنْ خَارِجُ الْقِسْمَةِ ٥ + ١٧ كَ لَزِمَ أَنْ يَحْصَلَ

$$\gamma - ٥ + ١٧ = (١٧ كَ + ٥) \gamma$$

$$\gamma - ٥ + ١٧ = ١٧ كَ + ٥ \gamma \quad \text{أو}$$

وَيَنْجُ مِنْ هَذِهِ الْمِثَالَةِ الْأَخِيرَةِ أَنْ ٥ = ١٧ كَ لَ = ٥ = ١٧ كَ لَ

يُؤْخِّدُ أَنْ ٥ = ١٧ كَ لَ = ٥ = ١٧ كَ لَ وَجَنِّدْ يَكُونُ خَارِجُ الْف

$$\gamma - ٥ + ١٧$$

وَإِذَا قَسَمْتَ الْكِيَّةَ التَّجْلِيَّةَ لَ + ٥ = ١٧ عَلَى ٥ + ١٧ طَ ١٧

أَنْ خَارِجُ الْقِسْمَةِ بِأَوَى ٥ + ١٧ كَ ١٧ تَحْصُلُ

$$\gamma - ٥ + ١٧ = (١٧ طَ + ٥) (١٧ كَ + ٥) \quad \text{أَوْ}$$

$$\gamma - ٥ + ١٧ = ١٧ (٥ كَ + ١٧ طَ) + ٥ كَ طَ$$

وَهَذِهِ الْمِثَالَةُ تَقْسِمُ إِلَى مَعَادِلَتَيْنِ أُخْرَيْنِ هَا

$$\gamma - ٥ كَ طَ = ٥ كَ طَ + ٥ كَ لَ = ٥$$

وَمِنْهَا يُؤْخِّدُ أَنْ

$$= ٥$$

(٥٩٤)

أربعة جذور بدرجة رابعة هي

$$\frac{-\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} \text{ و } \frac{-\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} \text{ و } \frac{\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} \text{ و } \frac{\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}$$

سند ويلزم لتخيل الجذور التي بدرجة رابعة نكية كالنكية هـ

ان نحل المعادلة  $z^4 = h$

بان يقال اذا فرض في مبداء الأمر ان النكية هـ موجبة ثم جعل جـ  
دعاً للعدد الذي يكون به قوته الرابعة مساوية للنكية هـ وفرض

ان  $z = h$  ص آت المعادلة  $z^4 = h$  الى

$$h^{\frac{1}{4}} = z \text{ ومنها يؤخذ أن } z^4 = 1 \text{ أو } z^4 = -1$$

وحيث أن  $z = 1$  هو حاصل ضرب  $z = -1$  في  $z = 1$  فيمكن تحويل

المعادلة  $z^4 = -1$  الى المعادلتين

$$z^4 = 1 \text{ و } z^4 = -1$$

فأما للمعادلة الأولى فيؤخذ منها  $z = 1$  وأما الثانية فينتج منها

$$z^4 = -1 \text{ فاذا ضربت مقادير } z \text{ الأربعة في } h \text{ تحصلت}$$

للنكية هـ أربعة جذور بدرجة رابعة هي

$$h^{\frac{1}{4}} \text{ و } h^{\frac{1}{4}} \text{ و } h^{\frac{1}{4}} \text{ و } h^{\frac{1}{4}}$$

واذا فرض ان النكية التي يراد تخيل جذورها الأربعة سالبة

(٥٩٤)

$$(٦) \quad \frac{\sqrt{3-2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{5}} - \sqrt{3-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{5}}}$$

ويمكن بواسطة هذين القانونين تحصيل الجذرين التربيعيين للمقدارين

التخيليين  $3-2\sqrt{5}$  و  $3+2\sqrt{5}$  وذلك بان يوضع ل بدل

دو -  $3-2\sqrt{5}$  فيجد

$$(٧) \quad \frac{\sqrt{3-2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{5}} + \sqrt{3+2\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{5}} + \sqrt{3+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{5}}}$$

$$(٨) \quad \frac{\sqrt{3-2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{5}} - \sqrt{3+2\sqrt{5}}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{5}} - \sqrt{3+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{5}}}$$

ينفذ واذا ريد تحصيل الجذرين التربيعيين للمقدارين التخيليين  $3+2\sqrt{5}$

و  $3-2\sqrt{5}$  فانه يلزم في القانونين (٧) و (٨) جعل  $3-2\sqrt{5} = 1$

$$\text{فيجد} \quad \frac{\sqrt{3-2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{5}}} \quad \text{و}$$

$$\frac{\sqrt{3-2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{5}}}{\sqrt{3-2\sqrt{5}}}$$

وجنث يكون الجذران التربيعيان للمقدارين  $3-2\sqrt{5}$  و  $3+2\sqrt{5}$

كتابة عن المقدارين المتخيلين للجزء في المعادلة  $3-2\sqrt{5} = 1$  لانه

يمكن وضع هذه المعادلة بالصورة  $(3-2\sqrt{5}) = 1$  التي يؤخذ منها

أن  $3-2\sqrt{5} = 1$  ويؤخذ ايضا من المعادلة  $3-2\sqrt{5} = 1$  أن

جذر بدرجة رابعة للمقدار  $3-2\sqrt{5}$  ومن هنا يعلم انه يوجد للمقدار

اربعة

من المجهول  $z$  مقداران وكلا هذين المقدارين الجديدين يتكون  
 منه المجهول  $z$  مقداران وهكذا إلى أن يتحصل للمجهول  $z$  عدد  
 من المقادير يساوي  $k$  وجميع هذه المقادير تؤول إلى كميات  
 توضع بالصورة  $x + y\sqrt{-1}$  لأنه قد تقدم أن الجذور التربيعية  
 لأي مقدار موضح بهذه الصورة هي مقادير توضع بالصورة المذكورة  
 ويبرهن بالسهولة على أن جميع المقادير المتحصلة للمجهول  $z$  مختلفة  
 بعضها عن بعض فيقال إذا تحققت هذه النظرية في المعادلة  
 $z^2 = 4$  تحققت أيضاً في المعادلة  $z^2 = 4$  وحينئذ إذا فرض  
 $z^2 = 4 + 2\sqrt{-1}$   $z^2 = 4 + 2\sqrt{-1}$  كناية عن مقدارين تخيليين مختلفين  
 من مقادير المجهول  $z$  بهما تحقق المعادلة  $z^2 = 4$  كانت مقادير  
 المطابقة لهذه المقادير في المعادلة  $z^2 = 4$  هي الجذور التربيعية  
 هذين المقدارين التخيليين لكنه يلزم بمقتضى المعادلتين المتقدمتين  
 خاتمة أن يكون الجذران التربيعيان للكمية  $4 + 2\sqrt{-1}$   
 مختلفين عن بعضهما وأن يكون الجذران التربيعيان للكمية  $4 + 2\sqrt{-1}$   
 مختلفين عن بعضهما أيضاً وزيادة على ذلك يكون كل واحد منهما مختلف  
 عن الجذرين التربيعيين للكمية الأولى لأنه إن كان الأمر بخلاف ذلك

(٤٢٦)

ووضعت بالصورة - جـ لزوم لذلك أن تحل المعادلة

$$ز^3 = -جـ$$

فإذا جعل أيضًا جـ رمزًا لعدد الذي تكون قوسه الرابعة - أ<sup>٤</sup>  
 للقيمة جـ وفرض أن  $ز = حـ$  فإن المعادلة  $ز^3 = -جـ$  تتحول  
 إلى المعادلة  $حـ^3 = -جـ$  أو  $حـ^3 = -١$

التي يؤخذ منها أس الجذور الأربعة للقيمة - جـ نتحصل بواسطة  
 سرب الجذور الأربعة للعدد - ١ (المتعملة كما في البند السابق)  
 في الجذر حـ

١٢٤٤ وإذا جعل كـ رمز العدد صحيح جـ رمز القيمة الحقيقية  
 أول مقدار تخيل وفرضت المعادلة  
 (٥) .....  $ز^3 = جـ$

كانت مقادير ز المحققة لهذه المعادلة جذورًا بالدرجة ٣  
 للقيمة جـ ولأنه يمكن وضع هذه المعادلة بالصورة  
 $ز^3 = (١ - ١)$

وهذه المعادلة يؤخذ منها للجذور ٣ مقداران كل واحد هـا يتكون  
 من



واذا فرضنا صار استخراج الجذر التكعيبي لمقدار  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}}$  المطلق بواسطة  
الطريقة السابقة وحاصل  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}}$  ومن هذا الجذر التكعيبي المأخوذ بعلامة  
بعلامة النكبة  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}}$  كان  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}}$  واذ كان  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}}$   
المعادلة (٨) الى

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} \quad \text{أو} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = 1.$$

وجنبذا يكون  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = 1$  قابلا للقسم على  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}}$  (كما في بند من الجزء الأول)  
ويكون خارج القسم هو  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} + 1$  وينبأ على ذلك يمكن وضع  
المعادلة  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = 1$  بالصورة  
$$(\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} - 1)(\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} + 1) = 0.$$

فإذا لم يكن  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = 1$  يكون حاصل ضرب جملة مضارب حقيقية أو تخيلية  
معدوماً ان يكون واحد من هذه المضارب معدوماً (كما في بند)  
فإنه يجب جذور المعادلة  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = 1$  بواسطة حل المعادلتين  
$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = 1 \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = -1.$$

فيؤخذ من المعادلة  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = 1$  أن  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = 1$  ومن المعادلة  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = -1$   
أن  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = -1$  أو  $\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = 1$   
ومن هنا يعلم أن المعادلة لها ثلاثة جذور تكعيبية  
$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = 1 \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = -1 \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}} = \omega$$

(٥٩٦)  
 ورفع هذان الجذران إلى القوة الثانية كان الناتج واحداً وبناءً على ذلك  
 لا تكون الجذور  $m + \sqrt{2}$  و  $m + \sqrt{2}$  مختلفين عن بعضهما  
 وهذا يخالف للفرض

سند فاذا فرضت المعادلة

$$(٦) \dots \dots \dots z^2 = m$$

وجعل  $m$  رمز العدد صحيح كانت المقادير المتحصلة للجذور من هذه  
 المعادلة جذوراً بالدرجة  $m$  للكمية  $m$  فان كان  $m$  عدداً  
 زوجياً وضع بالصورة  $2x$   $k$  وحيث أن  $m$  هو عدد زوجي  
 فان فرضت المعادلة  $z^{2x} = m$  نحول المعادلة (٦) إلى

$$(٧) \dots \dots \dots v^2 = m$$

ومن الممكن تعيين مقادير  $v$  المحققة لهذه المعادلة نحصل للجذور من كل  
 مقدار  $x$  ومن لهذا الجذور بواسطة العلويات المتوالية التي تجري لانتهج  
 الجذور التربيعية عدد من المقادير يساوي  $k$

واذا لوحظت الحالة التي تكون فيها  $m$  كمية حقيقية موجبة أو سالبة  
 وكان  $2 = 2$  آت المعادلة (٧) إلى

$$(٨) \dots \dots \dots v^2 = m$$

إذا فرض

وجعل  $\mathcal{H}$  رقماً للعدد الذي إذا رفع إلى القوة الثالثة تحصلت منه  
 الكمية  $\mathcal{H}$  كانت جذور ثلاثة التكعيبية لهذه الكمية معينة  
 بالرموز  $\mathcal{H}$  و  $\mathcal{H} \pm \mathcal{L}$  و  $\mathcal{H} \pm \mathcal{M}$  وجذور التربيعية للجذر  $\mathcal{H}$  معينة  
 بالرموز  $\mathcal{H} \pm \mathcal{H}$  والجذور التربيعية للجذر  $\mathcal{H} \pm \mathcal{L}$  معينة بالرموز  
 $\mathcal{H} \pm \mathcal{H}$  وتختص الجذور التربيعية للجذر  $\mathcal{H} \pm \mathcal{L}$  بنسبة على أن  
 الاختلاف  $\mathcal{L} = 1$  يؤخذ منه  $\mathcal{L} = 1$  ومن هنا ينتج أن الجذور  
 التربيعية للجذر  $\mathcal{H} \pm \mathcal{L}$  تكون نسبة بالرموز  $\mathcal{H} \pm \mathcal{H}$  وجذور  
 تكون الجذور التي بدرجة سادسة للكمية  $\mathcal{H}$  معينة بالرموز  
 $\mathcal{H} \pm \mathcal{H} \pm \mathcal{H} \pm \mathcal{H} \pm \mathcal{H} \pm \mathcal{H}$

ويمكن تحصيل هذه الجذور بكيفية أخرى هي أنه إذا رُمز إلى الواحد  
 منها بالرمز  $\mathcal{L}$  تحصلت من ذلك المعادلة

$$\mathcal{L}^3 = \mathcal{H}$$

ولرمز أيضاً بالرمز  $\mathcal{H}$  العدد الذي إذا رفع إلى القوة لثانية  
 تحصلت منه الكمية  $\mathcal{H}$  فتكون  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2$  فإذا فرضنا  
 $\mathcal{L} = \mathcal{H}$  من آت المعادلة  $\mathcal{L}^2 = \mathcal{H}$  إلى الصور  
 $\mathcal{H} = \mathcal{L}$  ومنها ينتج أن  $\mathcal{L} = 1$  أي  $\mathcal{H} = 1$ .

فأضرب هذه الجذور التكبية الثلاثة للواحد في  $\frac{1}{2}$  فحصلت  
جميع الجذور التكبية للـ  $\frac{1}{4}$

وإذا أريد معرفة الكيفية التي يكون بها المقدار  $\frac{1}{4}$  ( $1 - \sqrt{-3}$ ) جذرًا تكبيبيًا الزم أن يرفع هذا المقدار إلى القوة الثالثة وذلك  
برفعه إلى القوة الثانية فيحصل من ذلك المقدار  $\frac{1}{4}$  ( $1 - \sqrt{-3}$ )  
الذي يتحصل من ضرب  $\frac{1}{4}$  ( $1 - \sqrt{-3}$ ) حاصل ضرب هو الواحد  
ونلاحظ أن مكعب  $\frac{1}{4}$  ( $1 - \sqrt{-3}$ ) يساوي الواحد

وبتنبط من هذه العمليات الحسابية أن كل واحد من الجذرين  
التكبيين التخياليين للواحد عبارة عن مربع الآخر وجنث إذا رمز  
للاخر  $\alpha$  والواحد  $\beta$  من هذين الجذرين بالرمز  $\omega$  كان الآخر  
مبينًا بالرمز  $\omega^2$  وإذا جعل  $\omega$  كما كان رمز الجذر التكبيبي الحقيقي  
للـ  $\frac{1}{4}$  كانت الجذور الثلاثة التكبية للـ  $\frac{1}{4}$  مبينة  
بالرموز  $\omega$   $\omega^2$   $\omega^3$

سند  $\frac{1}{4}$  ويمكن لتجسيم الجذور التي بدرجة سادسة لأي كمية أن تؤخذ  
الجذور والترتيب لكل من الجذور الثلاثة التكبية لهذه الكمية  
نادافرض أن كمية المفروضة موجبة ورمزها بالرمز  $\omega$

(٦٠١)

في المعادلات ذات الجذرين من المعادلات ذات الحدود  
الثلاثة التي يمكن تحويلها الى معادلات من الدرجة ثمانية  
سند يطلق اسم المعادلات ذات الجدين على المعادلات التي يمكن وضعها  
بالصورة

$$(1) \dots \dots \dots x^8 - px^4 + q = 0$$

هـ هي كتابة عن كيفية معلومة

وجذور المعادلة (١) هي المقادير المتوعة الجبرية التي تفرض للكمية  
أ هـ وبما على ذلك يكون لها جذور عددها م (كما في سند) على  
اى وجه كان المقدار الحقيقي او التخيلي للكمية هـ وهذه الجذور تكون  
كلها غير متساوية لانه لا يوجد مضروب مشترك بين الكمية ذات  
الجدين هـ - هـ ومشتقتها ذات الدرجة الاولى م هـ  
وحينئذ يكون للمقدار الجذري أ هـ باعنان جيبين بمقادير عددها  
م مختلفة بعضها عن بعض

فاذا جعل هـ رمزاً لواحد من مقادير الكمية الجذرية أ هـ  
أعني لواحد من جذور المعادلة (١) كان  $h^2 = c$  هـ واذا فرضت  
 $m = c$  هـ ووضع مقدار س هذا في المعادلة المفروضة

وحيث أن  $\sqrt{-1}$  كتابة من حاصل ضرب  $\sqrt{-1}$  في  $\sqrt{-1}$  فيمكن  
استعراض القاعدة  $\sqrt{-1} = -1$  بالمعادلتين  
 $\sqrt{-1} = -1$  و  $\sqrt{-1} = 1$ .

ويجب أن جذور القاعدة  $\sqrt{-1} = -1$  هي  $1$  و  $-1$  فتكون  
جذور القاعدة  $\sqrt{-1} = 1$  هي  $1$  و  $-1$  و  $-1$  و  $1$  فإذا ضربت  
هذه مقادير ستة مفروضة للتقريب في  $\sqrt{-1}$  كانت الجذور

الستة هي  $1 + \sqrt{-1}$  و  $1 - \sqrt{-1}$  و  $-1 + \sqrt{-1}$  و  $-1 - \sqrt{-1}$  و  $1$  و  $-1$   
ويستنبط من الملاحظات المقدمة أن الجذور التي درجتها

قوة من قوى العدد  $n$  أو حاصل ضرب العدد  $n$  في قوة من قوى

تكون لها مقادير يقدر ما يوجد في درجتها من الأحاد

وقد تقدم أنه هذه النظرية تشمل على جذور أسائر الدرجات لأنه

إذا مر بالجزء  $m$  لعدد صحيح كان دائما للقيمة الحقيقية أو

للمقدار الموضوع بالصورة  $1 + \sqrt{-1}$  جذور عددها  $m$

بالدرجة  $m$  ويجب أن نضع جميع المقادير التخيلية لهذه الجذور

بالصورة  $1 + \sqrt{-1}$

كما في هذه المعادلة الجذرية  
 لا بد من أن تكون متضمنة لها  
 من ذلك أن في هذا  
 كان  $x^{14} = 1$  جريباً

وإذا قسم الطرفين بالأولى المعادلة المفروضة على ص - 1 نحصل  
 من ذلك المعادلة

$$(6) \dots x^{14} + x^{13} + \dots + x + 1 = 0$$

وهذه المعادلة لها 14 الجذر معادلة نصفها في الدرجة (7) (كما في ص 34)  
 والمعادلة  $x^{14} = 1$  لها جذور  $x = 1$  وأما جذورها  
 الأخرى فهي تخيلية

ولتعيين هذه الجذور يلزم في المعادلة حذف المصروب  $x^{14}$   
 الذي يحصل من حذفه معادلة مكعبة درجتها 12 وكانت  
 لا تحذف لأنها إذا انحلت جذور المعادلة  $x^{14} = 1$  يلزم  
 تغيير علامات هذه الجذور لتحصل من ذلك المعادلة  $x^{14} = -1$   
 فإذا جعل  $m$  رمز العدد زوجي كالعدد 12 كان للمعادلة  
 $x^{12} = -1$  جذران حقيقيان هما  $x = 1$  وأما باقي جذورها

(٩٠٤) من بين هذه القواعد التي لم تحصلت من ذلك المعادلة

..... من ١ = ٠

بما أن ذلك يتضمن جميع مقادير  $x$  بواسطة ضرب أي واحد

بمقادير  $x$  التي عدد هـ م

نرى أن الحد المعلوم من المعادلة ذات الحد بن كية حقيقة

و من هذا الحد بالرمز  $\pm$  هـ بفرض هـ كية موجبة آت المعادلة

(٩٠٥)

..... من ١ = ٠

العمل به من نواحد من المقادير الوقية للكية الجذرية

و من ١ = ٠ هـ ص آت المعادلة (٩٠٦) إلى المعادلة

..... من ١ = ٠

بما أن المعادلة (٩٠٦) هذه كلية فلزم حلها بالمناوبة المتقدمة

في بندي ٣٢٩ و ٣٣٠

فإذا فرض في مبدأ الأمر أن م كناية عن عدد فردى كالعدد ١٠ هـ م

ثم لوحظت المعادلة

(٩٠٥) ..... من ١ = ٠

لأن



وَأَن لَّسَ مِنْ جَنَّةٍ مِّن دُونِهَا

وَأَن لَّسَ مِنْ جَنَّةٍ مِّن دُونِهَا

فَتَكُونُ لَكُمْ يَوْمَئِذٍ مِّن دُونِهَا مِثْلُهَا

يَوْمَئِذٍ لَّكُم مِّن دُونِهَا مِثْلُهَا

الَّذِينَ لَا يَصْرَفُونَ

الَّذِينَ لَا يَصْرَفُونَ

وَيَسْأَلُهُمْ فِيهَا قَائِدُهُمْ

وَيَسْأَلُهُمْ فِيهَا قَائِدُهُمْ

وَيَسْأَلُهُمْ فِيهَا قَائِدُهُمْ

وَيَسْأَلُهُمْ فِيهَا قَائِدُهُمْ

وَيَسْأَلُهُمْ فِيهَا قَائِدُهُمْ

وَيَسْأَلُهُمْ فِيهَا قَائِدُهُمْ

وَيَسْأَلُهُمْ فِيهَا قَائِدُهُمْ

وَيَسْأَلُهُمْ فِيهَا قَائِدُهُمْ

وَيَسْأَلُهُمْ فِيهَا قَائِدُهُمْ

وَيَسْأَلُهُمْ فِيهَا قَائِدُهُمْ

(٢٠٤)

فانها تكون تخيلية ولتعيين هذه الجذور يلزم ان نقسم المعادلة  
المفروضة على  $x-1$  فنحصل من ذلك معادلة عكسية درجتها  
 $2-1=1$  لانكون مشتملة الا على قوى زوجية للجهو لكنه سهل حل  
المعادلة  $x^2-1=0$  بواسطة قسمتها الى المعادلتين  $x^2-1=0$   
و  $x^2+1=0$

وحيث ان المعادلة  $x^2+1=0$  لها جذور تخيلية فقط فيلزم  
تحويلها الى معادلة نصفها في الدرجة بأن يجعل  $x = \frac{1}{z}$   
ويمكن ايضا ان حل المعادلة  $x^2+1=0$  يؤول الى حل معادلة  
ذات حدين فردية الدرجة وذلك بأن نجري عليها الطريقة المتقد  
(في ندى ٢٩٤ و ٣٤٣)

نجد وما ينبغي التنبية عليه انه اذا حذفنا الجذور الحقيقية  
للمعادلة  $x^2+1=0$  بأن وضع فيها  $x = \frac{1}{z}$  كانت  
جميع جذور المعادلة المشتملة على حقيقة دائماً ولذا يفرض  
ان  $1-7x^2$  احد المقادير التخيلية للتغير  $x$  فيكون عكس  
هذا المقدار هو  $\frac{1}{1-7x^2}$  حيث ان

$$\frac{1-7x^2}{1-7x^2} = \frac{1-7x^2}{(1-7x^2)(1-7x^2)} = \frac{1}{1-7x^2}$$

وان



وثالثاً معادلة  $١ = ١$ ، التي جذورها هي

$$ص = ١ = ١، ص = ١ = ١، و ص = ١ = ١$$

ورابعاً المعادلة  $١ = ١$ ، التي جذورها هي من جذور المعادلة

$$السابقة  $١ = ١$ ، ومن جذور المعادلة  $١ = ١$ ،$$

التي يمكن تخليطها إلى معادلتين  $١ = ١$  و  $١ = ١$ ،

بنيء والقواعد السابقة (٢) في بند (١) من

توصل إلى مقادير جذور المعادلة  $١ = ١$ ، في الحالة التي يكون

فيها  $١ = ١$  دالة على قوة العدد  $١$  أو على حاصل ضرب الأعداد

$١$  أو  $١$  في أي قوة للعدد  $١$ ، فإن كانت هذه المقادير دالة

على خطوط مائلة يمكن باستعمال طريقة تحويل هذه الجذور مما

كان مقدار النكبة (م)

بنيء ويطبق اسم المعادلة ذات الحدود الثلاثة على كل معادلة

يمكن وضعها بالصورة

$$(٧) \dots \dots \dots ١ + ١ + ١ = ١ \dots \dots \dots (٧)$$

فإذا فرض في هذه المعادلة أن  $١ = ١$  ص حد

$$ص + ١ + ١ = ١$$

وإذا

٦٠٥  
 مقدمة في التفكير الرياضي  
 الثاني وينتهي بالادلة بالنسبة

وبنية المبرهنات المعروفة بالادلة والسند والتمثيل والمشتابهة

٢٧٠٠ - ٢٧٠٠

وبينهم لم يزلوا من القوة والقدرة في العمل المعادلة

٢٧٠٠ - ٢٧٠٠

وهذه المعادلة لها ثلاثة جذور وأحد هانطق وهو الجذور

الأخران الخسيران عن المعادلة ١٦ - ١٠ - ١٠ - ١٠ = ٢٨١ = تجلياً

فأما الجذر الحقيقي ١٠ = ١٠ فإنه لا يكون محتملاً للمعادلة المفروضة

في الحالة التي لا تلاحظ فيها غير المقادير الرقيقة للعلامات الجذرية

الانه يكون محتملاً لهذه المعادلة اذا تغيرت علامة ١٠ =

فاذا حذفنا العلامات الجذرية الموجودة في معادلة تحسنت

من المعادلة المنطقة المحاذية من ذلك جميع المقادير المحمولة للمعادلة

المفروضة وتجميع المعادلات الناتجة منها وذلك بملاحظة المقادير

المتنوعة للعلامات الجذرية لانه اذا جعلت كل علامة بما تحتها

ساوية لمحمول ودرجها المعادلة الى قوة درجتها كدرجة

تكون جملة من المعادلات في هذه الحالة  
بعد أن تحذف جميع المتغيرات المتداخلة فيها  
ونحصل على المعادلة

$$12x + 10y + 8z = 1$$

فاذا وضع  $x = 1$  في المعادلة  $12x + 10y + 8z = 1$  نحصل على

$$12 + 10y + 8z = 1$$

وإذا حذف الجملتان  $10y + 8z$  من هاتين المعادلتين ومن المعادلة

$$12x + 10y + 8z = 1$$

$$12x = 1$$

وإذا وضع  $x = 1$  في المعادلة  $12x + 10y + 8z = 1$  نحصل على

$$12 + 10y + 8z = 1$$

وإذا حذف من هذه المعادلة ومن المعادلة  $12x + 10y + 8z = 1$  نحصل على

توصلنا بذلك للمعادلة

$$12x + 10y + 8z = 1$$

وهذا الناتج يتخصص بحذف العلامات الجذرية من المعادلات  
المفروضة وذلك بأن يرفع طرفها إلى القوى المتوالية ونحو

(١٥١)  
فإذا اخرج هؤلاء من  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{3}$  أو التباين أو التباين  
منه في هذا الأمر

في  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{3}$  -  $\frac{1}{4}$  -  $\frac{1}{5}$  -  $\frac{1}{6}$  -  $\frac{1}{7}$  -  $\frac{1}{8}$  -  $\frac{1}{9}$  -  $\frac{1}{10}$

وإذا كانوا في  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{3}$  -  $\frac{1}{4}$  -  $\frac{1}{5}$  -  $\frac{1}{6}$  -  $\frac{1}{7}$  -  $\frac{1}{8}$  -  $\frac{1}{9}$  -  $\frac{1}{10}$

في  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{3}$  -  $\frac{1}{4}$  -  $\frac{1}{5}$  -  $\frac{1}{6}$  -  $\frac{1}{7}$  -  $\frac{1}{8}$  -  $\frac{1}{9}$  -  $\frac{1}{10}$

فإذا اخرج من بدل  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{3}$  -  $\frac{1}{4}$  -  $\frac{1}{5}$  -  $\frac{1}{6}$  -  $\frac{1}{7}$  -  $\frac{1}{8}$  -  $\frac{1}{9}$  -  $\frac{1}{10}$   
عصفت من ذلك عداثة في درجة  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{3}$  -  $\frac{1}{4}$  -  $\frac{1}{5}$  -  $\frac{1}{6}$  -  $\frac{1}{7}$  -  $\frac{1}{8}$  -  $\frac{1}{9}$  -  $\frac{1}{10}$

ويمكن أيضاً تمثيل العداثة العقلية بهذه الطريقة  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{3}$  -  $\frac{1}{4}$  -  $\frac{1}{5}$  -  $\frac{1}{6}$  -  $\frac{1}{7}$  -  $\frac{1}{8}$  -  $\frac{1}{9}$  -  $\frac{1}{10}$

في  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{3}$  -  $\frac{1}{4}$  -  $\frac{1}{5}$  -  $\frac{1}{6}$  -  $\frac{1}{7}$  -  $\frac{1}{8}$  -  $\frac{1}{9}$  -  $\frac{1}{10}$

وذلك عند ما يؤخذ من الامكانين الجذور التكيبية  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{3}$  -  $\frac{1}{4}$  -  $\frac{1}{5}$  -  $\frac{1}{6}$  -  $\frac{1}{7}$  -  $\frac{1}{8}$  -  $\frac{1}{9}$  -  $\frac{1}{10}$

ولذلك في التكيبية  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{3}$  -  $\frac{1}{4}$  -  $\frac{1}{5}$  -  $\frac{1}{6}$  -  $\frac{1}{7}$  -  $\frac{1}{8}$  -  $\frac{1}{9}$  -  $\frac{1}{10}$

فإذا اخرج واحد من الجذور التكيبية التخيلية الواحد بالرمز

في  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{3}$  -  $\frac{1}{4}$  -  $\frac{1}{5}$  -  $\frac{1}{6}$  -  $\frac{1}{7}$  -  $\frac{1}{8}$  -  $\frac{1}{9}$  -  $\frac{1}{10}$  (كما في بند ٢٢)

ويجب أن يؤخذ من الجذور التكيبية  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{3}$  -  $\frac{1}{4}$  -  $\frac{1}{5}$  -  $\frac{1}{6}$  -  $\frac{1}{7}$  -  $\frac{1}{8}$  -  $\frac{1}{9}$  -  $\frac{1}{10}$

مطابقة لبعضها البعض





(١١٢)  
 س = هـ وجنبا اذا جعل ك رمزا للزيادة الخ تفرض  
 لتغير س لزم ان يكون س = هـ دالا على النهاية الكبرى والصغرى  
 ان يكون الفرق د (هـ + ك) - د (هـ) سائبا دائما او موجبا دائما  
 مما كانت علامة الكمية ك بشرط ان تكون هذه الكمية المتزايدة  
 صغيرة بالحماية

ويمكن ايضا ان يقال ان المقدار س = هـ تؤخذ منه النهاية الكبرى  
 والصغرى للدلالة عندئذ يأخذ س في الازدياد حتى يتجاوزه  
 المقدار هـ وتأخذ الدلالة في الازدياد الى الحد الذي تأخذ منه  
 في الناقص او عند ما يأخذ س في الناقص الى المقدار هـ وتأخذ الدلالة في النقص الى الناقص في الزيادة  
 وقد شوهد انه اذا كانت الدلالة المبينة بالرمز د (س) نامة حدث  

$$د (س + ك) = د (هـ) + د (هـ) ك + د (هـ) \frac{ك^2}{2x_1} + م$$

ومن هنا يؤخذ

(١) ... د (هـ + ك) - د (هـ) = د (هـ) ك + د (هـ)  $\frac{ك^2}{2x_1}$  + م  
 فاذا فرض للكمية ك مقدار صغير بالحماية كان الطرف الثاني  
 من هذه المتساوية منجدا في العلامة مع حدها الاول فاذ لا لم  
 تنعدم الدلالة د (هـ) كان الفرق د (هـ + ك) - د (هـ) متخالفا

1. 1940年10月10日，国民党政府正式宣布对日宣战，这是中国历史上第一次以国家名义对日本帝国主义宣战。

والتكرير في مثل هذا النوع من التفسيرين في قوله تعالى  
 وهذا لا يرتفع في شيء من جهل أو سوء في كفاية عن الجدول  
 للمادة من -

فإذا اجريت عملية الاختصار على هاتين النسبتين أثبتت أن نسبة كل علية  
ضرب كذا في مائة من جنس الكلي كما أثبتت من معادلة بدرجته تاسعة  
التي هي مقلوب نسبة مخرجها إلى مخرجها في النسبة

استغفر المستغفرتين في كل عمل متعلق بالنهايتين  
الكبرى والصغرى

فإنه إذا فرض أن  $\alpha$  و  $\beta$  واحدة من دلالة المتغيرين من وفرض  
 أن  $\alpha$  المتغيرين مقدار مخصوص كالمقدار  $\alpha$  اشق على مقدار الدلالة  
 المطابق  $\alpha$  هذا المقدار اسم المتغير  $\alpha$  واسم  $\beta$  لا فرق بينهما فيكون  
 مقدار  $\beta$  يكون حصة  $\beta$  في  $\alpha$  أو في المتغير  $\beta$  فوما لا فرق من  
 المقدار  $\beta$  كونه كانت مقادير  $\alpha$  المطابق  $\alpha$  هذا المقدار  $\alpha$  أكبر أو أصغر من مقدار  $\beta$  فرض

كانت هذه الدلالة بكمة سالبة تحصلت من المقدار  $s = -$  نهاية شي  
الكبرى وان كانت موجبة تحصلت منه نهاية هي الصفر

مثلاً اذا كان  $r(s) = s - q$   $s + ٥ = ٣$  وجعلت الدلالة  
المشتقة من الدلالة ذات الدرجة الاولى مساوية للصفر تحصلت  
من ذلك المعادلة

$$s - ٦ = ٥ + ٥ = ٠$$

التي يكون جذراها  $٥$  و  $١١$  وحيث ان المقدار  $s = ٠$  يُصَبِّرُ  
الدلالة  $r(s)$  مساوية للمقدار  $-١١$  فيكون اعداد انذار  
تأخذها الدلالة  $r(s)$  في فرض  $s = ١$  هو النهاية الكبرى وحيث  
ان المقدار  $s = ٥$  يُصَبِّرُ الدلالة  $r(s)$  مساوية للمقدار  $-١١$   
فترتب عليه ان الدلالة  $r(s)$  تكون هي النهاية الصغرى

وان كان  $r(s) = s - ٣$   $s + ٢ = ٧$

وكانت المشتقة الاولى من هذه الدلالة هي  $s - ٦ = ٢ + ٢$   
أو  $s - ١$  فلا يمكن انعدامها الا في فرض  $s = ١$  وحيث  
ان هذا المقدار المعروض للمتغير  $s$  يُصَبِّرُ الدلالة  $r(s)$   
سعدومة والدلالة  $r(s)$  كتابة عن معددة لا تكون لها دلالة

(٦١٤)  
في الصدمة مع الكمية  $K$  وإذا لا يمكن ان تكون الدلالة  $R(H)$  هي  
النهاية الكبرى ولا الصغرى

وإذا كانت الدلالة  $R(H)$  معدومة وكانت الدلالة  $R(H)$  غير معدومة  
كان الفرق  $R(H+K) - R(H)$  متقدماً في العدم دائماً مع  $K$  بشرط  
ان تكون هذه الكمية صغيرة بالحكاية وجنيداً إذا كانت الدلالة  
 $R(H)$  كمية سالبة كانت الدلالة  $R(H)$  هي النهاية الكبرى وإذا كانت  
الدلالة  $R(H)$  كمية موجبة كانت الدلالة  $R(H)$  هي النهاية الصغرى  
فإذا كانت الدلالة  $R(H) = 0$  والدلالة  $R(H) = 0$  في آن واحد  
فلا يتحصل من المقدار  $S = H$  واحدة من النهايتين الكبرى  
او الصغرى ما لم تكن الدلالة  $R(H) = 0$  ايضاً لانه يتحصل في هذه  
الحالة المقدار  $S = H$  نهاية هي الكبرى إذا كانت الدلالة  $R(H)$   
كمية سالبة ونهاية اخرى هي الصغرى إذا كانت الدلالة  $R(H)$   
كمية موجبة

وبلنم على العموم لكي يتحصل من المقدار  $S = H$  النهاية الكبرى  
او الصغرى للدلالة  $R(H)$  ان تكون الدلالة الاولى التي لم تقدم  
من بين مشتقات الدلالة  $R(H)$  مشتقة زوجية المرتبة فان  
كانت

حتى انعدمت وجنيد يكون دلالة  $\epsilon$  (س) نهاية هي الكبرى  
 سيند فاذا وضع س بدل  $\epsilon$  في المساوية (١) وقسم طرفاها على  
 ك تحصل

$$\frac{\epsilon(س + ك) - \epsilon(س)}{\epsilon} = \frac{\epsilon(س) + \frac{\epsilon}{\epsilon \times \epsilon \times 1} + \epsilon(س)}{\epsilon} \quad \epsilon(س) + ك$$

وحيث ان الدلالات المشتقة  $\epsilon(س)$  و  $\epsilon(س)$  و  $\epsilon(س)$  و كج قائمة بالنسبة  
 الى س فتكون لها دائما مقام برانتهائية مادام للمتغير س  
 مقدار انتهائي وجنيد يمكن أخذ القيمة ك صغيرة بالكفاية  
 حتى يكون المقدار الرقي للقيمة

$$\frac{\epsilon}{\epsilon \times 1} + \epsilon(س) + \frac{\epsilon}{\epsilon \times \epsilon \times 1} \epsilon(س) + كج$$

دون عدد مفروض كالعدد ط الذي يقرب من الصفر بقدر

ما يراد كاتقدم (في سيند) وجنيد يتحصل

$$\frac{\epsilon(س + ك) - \epsilon(س)}{\epsilon} < \frac{\epsilon(س) + \frac{\epsilon}{\epsilon \times \epsilon \times 1} + \epsilon(س)}{\epsilon} - ط$$

$\epsilon(س) + ط$

وبناء على ذلك اذا اخذت كية من دلالة نامة في الازد ياد بالنسبة  
 كانت النسبة بين هذا الازد ياد وهذه الكية المتغيرة كية  
 انتهائية مساوية بالتقريب للمقدار الذي تأخذ من دلالة

المفروضة واحدة من النهايتين الكبرى والصغرى  
 سند ٣٥٤ ومتى كانت الدلالة د (هـ) غير معدومة كان الفرق د (هـ) ك  
 - د (هـ) بالنسبة لمقادير موجبة دون الكمية لا متخذاً في العلامة  
 مع الدلالة د (هـ) وبناءً على ذلك اذا فرض للتغير مقادير آخذة في  
 الزيادة آخذت الدلالة د (س) في الزيادة ان كانت المشتقة  
 د (س) كمية موجبة وفي الناقص ان كانت هذه المشتقة كمية سالبة  
 ويمكن ان يستنبط من هنا انه اذا كانت الدلالة د (س) هي النهاية  
 الكبرى أو الصغرى كان د (س) = ٠ لانه يلزم بسبب ان الدلالة  
 د (س) لا تزال آخذة في الزيادة الى الحد الذي تأخذ منه في الناقص  
 أو انها لا تزال آخذة في الناقص الى الحد الذي تأخذ منه في الزيادة  
 ان علامة الدلالة د (س) تتغير وهذا لا يتأتى الا اذا انعدمت  
 هذه الدلالة وكذلك اذا كانت المشتقة د (س) كمية موجبة  
 تزايدت الدلالة د (س) واخذت في الانتقال من السلب  
 الى الايجاب حتى انعدمت وبناءً على ذلك يكون للدلالة د (س) .  
 نهاية هي الصغرى واذا كانت المشتقة د (س) المذكورة كمية  
 سالبة آخذت الدلالة د (س) في الانتقال من الايجاب الى السلب



(٦١٨)  
 ذات المرتبة الأولى المشتقة من الدلالة المفروضة بالنسبة  
 للمقدار الأصلي المفروض للحكمة المتغيرة المذكورة  
 أو ان الدلالة ذات المرتبة الأولى المشتقة من دلالة عامة لحكمة  
 متغيرة تكون كتابة عندها نسبة الواقعة بين كل من ازدياد  
 الدلالة المذكورة وازدياد الحكمة المتغيرة

في طريقة امكرات غير المعينة  
 ينبغي قد تقدم انه اذا اجريت عملية قسمة وكان فيها التسويم والمقسوم  
 عليه مرتبين بحسب الدرجات الناعادية لحكمة كالحكمة س  
 امكن تحسب خارج مركب بجملة حدود مرتبة بحسب الدرجات  
 الناعادية للخوف س وممتد الى غير نهاية واستخراجات جذور  
 الكميات الجبرية توصل الى تحليلات كميات مركبة من جنس غير متناهية  
 ولنبرهن على انه يمكن ايضا تحليل مقدار كسرى أو غير منطلق بدون  
 ان نطبق على ذلك عملية قسمة او استخراج جذر فنقرب في مبداء

$$\frac{2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20}{2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20}$$

ثم نمر الى خارج قسمة هذا الكسر بجملة

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20$$

وجبت







المعادلة

من المعادلات التي يكون فيها

المعادلة  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ويكون مكرر القوة الاولى في النتيجة

في بيثا بالصورة  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

وحيث انه يلزم جعل المقدار الاول ما ويا للجزء الذي لا يحتوي

على  $n$  في الطرف الثاني من المعادلة (١) فتكون من ذلك المعادلة

(٢) وبجعل المقدار الثاني ما ويا للمكرر القوة الاولى للقيمة

$n$  في الطرف الثاني من المعادلة (١) تكون من ذلك المعادلة

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

فاذا ضربنا طرفا هذه المعادلة في  $n$  واستعرضنا القيمة

(٣)  $n(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}$  نحصلت من ذلك

المعادلة

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(٤)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

وحيث ان المكررات  $n$   $n$   $n$   $n$  هي هذه المعادلة

ونيزم لاجل تحصيل الكمالات القوية المتنوعة للكمية  $xy$  في الطرف  
 الثاني من المعادلة (١) ابدأ بتحليل المقادير  $(x+y)$   
 و  $(x-y)$  في

وحيث أن أسس هذه القوى أعداد صحيحة فنعلم تحليلات هذه  
 المقادير مما تقدم لكن لما كانت الطريقة التي تصدينا لذكرها تتوصل  
 بها التحليل الكمية  $(x+y)$  أغبر مرتبطة بالاثبات المتقدم  
 ممكن تطبيقها على الحالة التي يكون فيها  $m$  كناية عن عدد كسري  
 موجب أو سالب

فإنه اجريت عملية الضرب على تحليلات الكميات  $(x+y)$  و  $(x-y)$   
 و  $(x+y)$  فانه يشاهد بمثل ذلك ان الحدين الأولين  
 من تحليل الكمية  $(x+y)^2$  (يجعل  $m$  كناية عن عدد صحيح)  
 يكونان عبارة عن  $x^m + y^m$  ويمكن ايضا ان يبرهن  
 بواسطة عملية الضرب على أنه اذا كان تركيب الحدين الأولين  
 محققا في القوة النونية كان محققا ايضا في القوة  $(m+1)$

ومن هنا يتردد ان هذا التركيب يكون عموما  
 وبذلك يشاهد ان الجزء الذي لا يحتوي على  $xy$  في الطرف الثاني  
 من



(١٤٤)

وفي السوريات بقية عبارة عن اعداد ليس لها ارتباط بالكيين

من س وان المعادلة المفروضة تتحقق بدون ان نقرض مقادير

مخصوصة لكل من ح و س فلا بد من وقوع التساوي بين

مكررات قوى س و ح ومن هنا تكون المعادلات

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{(1-1)}{1} &= 1 \\ \frac{1}{2} \frac{(2-1)}{1} &= 1 \\ \frac{1}{2} \frac{(3-1)}{1} &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ومن هنا ينتج} \left\{ \begin{aligned} 1 &= 1 + 1 \\ 2 &= 1 + 1 \\ 3 &= 1 + 1 \end{aligned} \right.$$

وسهل تناول القانون الذي قد تكونت بمقتضاه هذه المعادلات

ومنه يؤخذ انه اذا رمز بالرمزين ر و ك الى المكرري الكييين

س<sup>١-٢</sup> و س في الطرف الثاني من المعادلة (١) حدث

$$ج ك + (١-٢) ر = ح ر \text{ ومن هنا ينتج ان } ك = \frac{(١+٢-٢) ر}{ج}$$

ويمكن ايضا تحصيل هذه المعادلة بهذه الكيفية وهي ان يوضع

في المعادلة (١) الحدان ر س<sup>١-٢</sup> + ك س وفي المعادلات

التي بعد ما الحدود الناتجة من هذين الحدين

وجيث لم يبق عليه غير تعيين المكرر ج فنقول اذا كانت

الاس م

بعد أن قابل معي في المعادلات الأمير محمد مصطفى امدا  
 صاحب الاخلاق المرضية فيما يشهد الله من حكم المؤلفات  
 وابديها واتفق الصنفات وانفعا وعلى الله على خاتم النبيين  
 ورسول الملك الحق المبين سيدنا محمد اهارى الامين وعلى آله  
 وصحبه الراشدين المرشدين مالا يحسب  
 الفهم بدر تمام وفاح نحافل

العلوم مائة

خام

تمت أضعف العباد الراجي غفوه مولاه الشكور عبده محمد اقدى مذكور  
 وفيما طبع هذا الكتاب بعون الله الملك الوهاب بمطبعة مدرسة  
 المهنة سخانة الخديوي بيولاقي في ثمانية عشر خلت من شهر  
 جمادى الاولى المذكورة سنة الف واربعمائة وتسعة وستين  
 من الهجرة النبوية على صاحبها افضل الصلاة  
 واهل التحية

امين

(١٤٩)  
 فأما استدلاله في الطرف الثاني من هذه المعادلة  
 والحد العمومي فإن مقتضاه أن يكون مبيثا بالصورة

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-m+1)}{m!}$$

بأن كان  $m$  دالا على عدد صحيح موجب كان تحليل البكبة  
 سابقة منتبها بالحد  $m$   $m-1$   $m-2$   $\dots$   $1$  إذا كان  $m = m+1$  أو  
 $m < m+1$  كان مكررا للحد العمومي  $m$  وما وإن كان  $m$   
 دالا على كسر أو على عدد سالب استحال البكبة المفروضة  
 الى غير نهاية

قال مترجم عبارات هذا الكتاب ومصححها \* ومنظم اتفاظ  
 وموضحها \* راجي رحمة المعبود المبدئ \* السيد صالح افندي مجري  
 احد مترجمي العلوم الرياضية \* ومدعي اللغة الفرنسية \*  
 بمدرسة الهندسة بخانه الخديوية \* الكاشفة ببولاق مصر المحمدية \* الى هنا  
 انتهى الجزء الثاني من المنحة الزهرية \* في الاعمال الجبرية \* وقد قابل  
 سعي وعلى مطلبة القاه \* وبكل تيمر بجله وحلاه \* المصنف فيما بعد  
 وما يبدى \* احد معبدى العلوم الرياضية بتلك المدرسة عظمى افندي